Opérateurs de Hecke pour les réseaux unimodulaires pairs

Jean Lannes

(travail en commun avec Gaëtan Chenevier)

Un réseau unimodulaire pair de dimension n est un $\mathbb{Z}$-module libre L de dimension n, muni d'une forme quadratique $\mathrm{q} : L \to \mathbb{Z}$, non dégénérée sur $\mathbb{Z}$ (en clair, telle que la forme bilinéaire associée induit un isomorphisme $L \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$) et définie positive. Un tel L peut être vu comme un réseau dans l'espace euclidien $V := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L$, vérifiant les deux propriétés suivantes :

– on a $x.x \in 2\mathbb{Z}$ pour tout x dans L (et donc aussi $x.y \in \mathbb{Z}$ pour tous x et y dans L) ;

– le réseau L est de covolume 1 dans V.

Cette observation explique la terminologie.

On note X_n l'ensemble des classes d'isomorphisme de réseaux unimodulaires pairs de dimension n. Il est bien connu que l'ensemble X_n est fini et qu'il est non vide si et seulement si n est divisible par 8. L'ensemble X_n a été déterminé pour $n \leq 24$:

– X_8 ne contient qu'un élément E_8 (lié au sytème de racines $\mathbf{E}_8$) ;

– X_{16} a deux éléments, E_{16} (lié au système de racines D_{16}) et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{E}_8$;

– X_{24} a été déterminé par Niemeier en 1968, il a 24 éléments (l'un d'eux est le fameux réseau de Leech, les 23 autres peuvent être encore décrits en termes de systèmes de racines).

On montre que X_{32} a plus de 80 millions d'éléments (Serre dit malicieusement dans son *cours d'arithmétique* que la liste n'en a pas été faite !).

Soit p un nombre premier. Soit V un espace euclidien de dimension n. On dit que deux réseaux unimodulaires pairs L et L' de V sont p-voisins (au sens de M. Kneser) si $L \cap L'$ est d'indice p dans L (et L').

Dans ce contexte, l'opérateur de Hecke T_p est l'endomorphisme du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_n]$, engendré par l'ensemble X_n, défini par la formule

$$\mathrm{T}_p[L] = \sum_{L' \ p\text{-voisin de } L} [L'] \qquad .$$

Théorème. *La matrice de l'endomorphisme* T_p *de* $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_{16}]$ *dans la base* $\{\mathrm{E}_{16}, \mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{E}_8\}$ *est*

$$\frac{p^4-1}{p-1} \ \left((p^{11}+p^7+p^4+1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{p^{11}-\tau(p)+1}{691} \begin{bmatrix} -286 & 405 \\ 286 & -405 \end{bmatrix} \right) \qquad ,$$

τ désignant la fonction de Ramanujan.

On expliquera comment démontrer ce théorème à l'aide de la théorie des opérateurs de Hecke pour les formes modulaires de Siegel et on décrira les ingrédients qui interviennent dans l'analogue de la formule ci-dessus en dimension 24.