Localisation forte des polymères dirigés en environnement aléatoire

Carmona Philippe

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
2 Rue de La Houssinière

Séminaire PMA, mai 2006

Outline

Outline

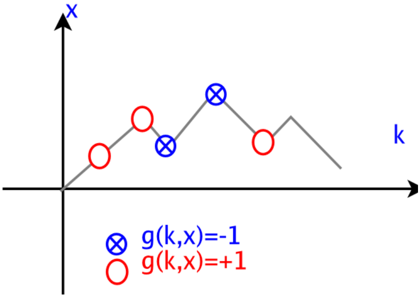
Le modèle d'Imbrie et Spencer '1988

Processus de base

P loi de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, espace canonique Ω

Environnement

$(g(k,x), k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d)$ iid sur $(\Omega_g, \mathcal{G}, Q)$
Moments exponentiels: $\lambda(\beta) = Q(e^{\beta g}) < +\infty \quad (\beta \in \mathbb{R})$



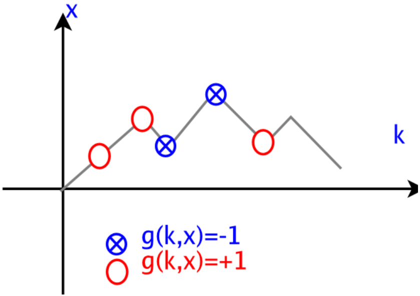
Le modèle d'Imbrie et Spencer '1988

Processus de base

P loi de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, espace canonique Ω

Environnement

$(g(k,x), k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d)$ iid sur $(\Omega_g, \mathcal{G}, Q)$
Moments exponentiels: $\lambda(\beta) = Q(e^{\beta g}) < +\infty \quad (\beta \in \mathbb{R})$



La mesure Polymère

μ_n probabilité sur l'ensemble des trajectoires Ω

$$d\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n} e^{\beta H_n - n\lambda(\beta)}\, dP(\omega)$$

$$H_n = H_n(\omega, g) = \sum_{i=1}^{n} g(i, \omega(i)) \quad \text{somme des bonus}$$

La fonction de partition

$$Z_n = Z_n(\beta, g) = P\left(e^{\beta H_n - n\lambda(\beta)}\right)$$

μ_n et Z_n sont des va définies sur $(\Omega_g, \mathcal{G}, Q)$

Modèle d'Anderson Parabolique

P loi de la marche aléatoire à temps continu sur $\mathbb{Z}^d$, générateur $L = \kappa\Delta$.
$(B_x(t), t \geq 0)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ Browniens indépendants

$$d\mu_t(\omega) = \frac{1}{Z_t} e^{\beta H_t - t\frac{\beta^2}{2}}\, dP(\omega)\,.$$

$$H_t = H_t(\omega, B) = \int_0^t dB_{\omega(s)}(s)\,.$$

Autres Modèles

Mvt Brownien dans un environnement Poissonien (Comets-Yoshida CMP '05) ou Brownien (Rovira-Tindel '05)

Modèle d'Anderson Parabolique

P loi de la marche aléatoire à temps continu sur $\mathbb{Z}^d$, générateur $L = \kappa\Delta$.
$(B_x(t), t \geq 0)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ Browniens indépendants

$$d\mu_t(\omega) = \frac{1}{Z_t} e^{\beta H_t - t\frac{\beta^2}{2}} \, dP(\omega) \,.$$

$$H_t = H_t(\omega, B) = \int_0^t dB_{\omega(s)}(s) \,.$$

Autres Modèles

Mvt Brownien dans un environnement Poissonien (Comets-Yoshida CMP '05) ou Brownien (Rovira-Tindel '05)

Question Principale

Quelle est l'influence de la loi de l'environnement, et de l'intensité β, sur la géométrie des trajectoires typiques sous la mesure polymère μ_t ? (Q ps, pour t grand)

Réponse

Toutes les réponses se trouvent dans le comportement asymptotique de la fonction de partition Z_t.

Question Principale

Quelle est l'influence de la loi de l'environnement, et de l'intensité β, sur la géométrie des trajectoires typiques sous la mesure polymère μ_t ? (Q ps, pour t grand)

Réponse

Toutes les réponses se trouvent dans le comportement asymptotique de la fonction de partition Z_t.

Loi du $0-1$ (Bolthausen,1989)

Z_t est une martingale positive, $Z_t \to Z_\infty$ p.s. et $Q(Z_\infty > 0) \in \{0,1\}$.
Fort désordre $\Leftrightarrow Z_\infty = 0$ p.s.
Faible désordre $\Leftrightarrow Z_\infty > 0$ p.s.

Forte localisation

$$\exists c > 0\,, \limsup_{t\to+\infty} \sup_x \mu_t(\omega(t) = x) \geq c \quad Q\, p.s.$$

Théorème de dichotomie

- Faible désordre $\Rightarrow$ diffusivité (Comets-Yoshida '05)

$$\mu_t\left(F(t^{-\frac{1}{2}}\omega(t.))\right) \to P^W\left(F(\omega(\frac{\cdot}{\sqrt{d}}))\right) \quad \text{(en Q proba)}$$

- Fort désordre $\Rightarrow$ forte localisation (Carmona-Hu '06)

Loi du $0-1$ (Bolthausen,1989)

Z_t est une martingale positive, $Z_t \to Z_\infty$ p.s. et $Q(Z_\infty > 0) \in \{0,1\}$.
Fort désordre $\Leftrightarrow Z_\infty = 0$ p.s.
Faible désordre $\Leftrightarrow Z_\infty > 0$ p.s.

Forte localisation

$$\exists c > 0\,, \limsup_{t\to+\infty} \sup_x \mu_t(\omega(t) = x) \geq c \quad Q\, p.s.$$

Théorème de dichotomie

- Faible désordre $\Rightarrow$ diffusivité (Comets-Yoshida '05)

$$\mu_t\left(F(t^{-\frac{1}{2}}\omega(t.))\right) \to P^W\left(F(\omega(\frac{\cdot}{\sqrt{d}}))\right) \quad \text{(en Q proba)}$$

- Fort désordre $\Rightarrow$ forte localisation (Carmona-Hu '06)

Loi du $0 - 1$ (Bolthausen,1989)

Z_t est une martingale positive, $Z_t \to Z_\infty$ p.s. et $Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.
Fort désordre $\Leftrightarrow Z_\infty = 0$ p.s.
Faible désordre $\Leftrightarrow Z_\infty > 0$ p.s.

Forte localisation

$$\exists c > 0\,, \limsup_{t \to +\infty} \sup_x \mu_t(\omega(t) = x) \geq c \quad Q\, p.s.$$

Théorème de dichotomie

- Faible désordre $\Rightarrow$ diffusivité (Comets-Yoshida '05)

$$\mu_t\left(F(t^{-\frac{1}{2}}\omega(t.))\right) \to P^W\left(F(\omega(\frac{\cdot}{\sqrt{d}}))\right) \quad \text{(en Q proba)}$$

- Fort désordre $\Rightarrow$ forte localisation (Carmona-Hu '06)

Theorem

En dimension $d = 1, 2$, pour tout $\beta > 0$ et tout environnement il y a fort désordre ($Z_\infty = 0$ p.s.).

(Carmona-Hu '02 cas gaussien, Comets-Shiga-Yoshida'03 : environnement général).

Théorème (Comets-Yoshida '04)

En dimension $d \geq 3$, Il existe $\beta_c > 0$, $0 \leq \beta < \beta_c \Rightarrow Z_\infty > 0$ *p.s.* et $\beta > \beta_c \Rightarrow Z_\infty = 0$ *p.s.*

Gaussien $\neq$ Bernoulli, Song et Zhou 1996

$\beta_c = +\infty$ pour un environnement Bernoulli, $\beta_c < +\infty$ cas gaussien.

Theorem

En dimension $d = 1, 2$, pour tout $\beta > 0$ et tout environnement il y a fort désordre ($Z_\infty = 0$ p.s.).

(Carmona-Hu '02 cas gaussien, Comets-Shiga-Yoshida'03 : environnement général).

Théorème (Comets-Yoshida '04)

En dimension $d \geq 3$, Il existe $\beta_c > 0$, $0 \leq \beta < \beta_c \Rightarrow Z_\infty > 0\, p.s.$ et $\beta > \beta_c \Rightarrow Z_\infty = 0\, p.s.$

Gaussien $\neq$ Bernoulli, Song et Zhou 1996

$\beta_c = +\infty$ pour un environnement Bernoulli, $\beta_c < +\infty$ cas gaussien.

Theorem

En dimension $d = 1, 2$, pour tout $\beta > 0$ et tout environnement il y a fort désordre ($Z_\infty = 0$ p.s.).

(Carmona-Hu '02 cas gaussien, Comets-Shiga-Yoshida'03 : environnement général).

Théorème (Comets-Yoshida '04)

En dimension $d \geq 3$, Il existe $\beta_c > 0$, $0 \leq \beta < \beta_c \Rightarrow Z_\infty > 0$ *p.s.* et $\beta > \beta_c \Rightarrow Z_\infty = 0$ *p.s.*

$\beta_c > 0$ Méthode du second moment (Imbrie et Spencer, Bolthausen) : Z_t martingale bornée dans L^2.

Gaussien $\neq$ Bernoulli, Song et Zhou 1996

$\beta_c = +\infty$ pour un environnement Bernoulli, $\beta_c < +\infty$ cas gaussien.

Theorem

En dimension $d = 1, 2$, pour tout $\beta > 0$ et tout environnement il y a fort désordre ($Z_\infty = 0$ p.s.).

(Carmona-Hu '02 cas gaussien, Comets-Shiga-Yoshida'03 : environnement général).

Théorème (Comets-Yoshida '04)

En dimension $d \geq 3$, Il existe $\beta_c > 0$, $0 \leq \beta < \beta_c \Rightarrow Z_\infty > 0\, p.s.$ et $\beta > \beta_c \Rightarrow Z_\infty = 0\, p.s.$

$\beta_c > 0$ Méthode du second moment (Imbrie et Spencer, Bolthausen) : Z_t martingale bornée dans L^2.

Gaussien $\neq$ Bernoulli, Song et Zhou 1996

$\beta_c = +\infty$ pour un environnement Bernoulli, $\beta_c < +\infty$ cas gaussien.

Pourquoi étudier les polymères dirigés en environnement aléatoire?

- C'est un problème difficile.
- Les méthodes perturbatives (développer en $\beta > 0$ petit) ne fonctionnent pas si $d = 1, 2$(sinon Sinai l'aurait fait).
- Si $d = 1$, numériquement sous μ_t, $|\omega(t)| \sim t^{2/3}$. Il y a superdiffusivité, pour tout $\beta > 0$. Quelle que soit l'intensité de l'environnement, on le perçoit.

Pourquoi étudier les polymères dirigés en environnement aléatoire?

- C'est un problème difficile.
- Les méthodes perturbatives (développer en $\beta > 0$ petit) ne fonctionnent pas si $d = 1, 2$(sinon Sinai l'aurait fait).
- Si $d = 1$, numériquement sous μ_t, $|\omega(t)| \sim t^{2/3}$. Il y a superdiffusivité, pour tout $\beta > 0$. Quelle que soit l'intensité de l'environnement, on le perçoit.

Pourquoi étudier les polymères dirigés en environnement aléatoire?

- C'est un problème difficile.
- Les méthodes perturbatives (développer en $\beta > 0$ petit) ne fonctionnent pas si $d = 1, 2$(sinon Sinai l'aurait fait).
- Si $d = 1$, numériquement sous μ_t, $|\omega(t)| \sim t^{2/3}$. Il y a superdiffusivité, pour tout $\beta > 0$. Quelle que soit l'intensité de l'environnement, on le perçoit.

Outline

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

Convergence de l'énergie libre

Il existe $p(\beta)$ déterministe, $\frac{1}{t} \log Z_t \to p(\beta)$ p.s. et dans L^1.

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} H_{t+s}(\omega, B) &= \int_0^{t+s} dB_{\omega(u)}(u) = H_t(\omega, B) + \int_t^{t+s} dB_{\omega(t+u)}(t+u) \\ &= H_t(\omega, B) + H_s(\theta_t \omega, \tau_t B) \end{aligned}$$

avec $\tau_t B_x(u) = B_x(t+u) - B_x(t)$ shift temporel sur l'environnement.

$$\begin{aligned} Z_{t+s} &= P(M^{\omega_{t+s}}) \\ &= P\left(e^{\beta H_t(\omega,B) - t\beta^2/2} e^{\beta H_s(\theta_t\omega, \tau_t B) - s\beta^2/2}\right) \\ &= P\left(M_t^\omega P_{\omega(t)}(M_s^\omega)(\tau_t B)\right) && \text{(Markov)} \\ &= \sum_x P\left(M_t^\omega \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)}\right) Z_s(x, \tau_t B) \\ &= Z_t \sum_x \mu_t(\omega(t) = x) Z_s(x, \tau_t B) \,. \end{aligned}$$

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

$$Z_{t+s} = Z_t \sum_x \mu_t(\omega(t) = x) Z_s(x, \tau_t B)\,.$$

$$Z_\infty \geq Z_t \sum_x \mu_t(\omega(t) = x) Z_\infty(x, \tau_t B) \quad \text{(Fatou), puis égalité}$$

$$\{Z_\infty(B) = 0\} = \left\{\forall x \in \mathbb{Z}^d,\, Z_\infty(x, \tau_t B) = 0\right\} \in \mathcal{G}_{t\infty}$$

est dans la tribu de queue.

Convergence de l'énergie libre

Il existe $p(\beta)$ déterministe, $\frac{1}{t} \log Z_t \to p(\beta)$ p.s. et dans L^1.

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

Convergence de l'énergie libre

Il existe $p(\beta)$ déterministe, $\frac{1}{t} \log Z_t \to p(\beta)$ p.s. et dans L^1.

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

Convergence de l'énergie libre

Il existe $p(\beta)$ déterministe, $\frac{1}{t} \log Z_t \to p(\beta)$ p.s. et dans L^1.

$$Z_{t+s} = Z_t \sum_x \mu_t(\omega(t) = x) Z_s(x, \tau_t B)\,.$$

$$\begin{aligned}\log Z_{t+s} &= \log Z_t + \log(\sum_x \mu_t(\omega(t) = x) Z_s(x, \tau_t B)) \\ &\geq \log Z_t + \sum_x \mu_t(\omega(t) = x) \log Z_s(x, \tau_t B)\end{aligned}$$

$\sum_x \mu_t(\omega(t) = x) = 1$, on prend l'espérance

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0,1\}$.

Convergence de l'énergie libre

Il existe $p(\beta)$ déterministe, $\frac{1}{t}\log Z_t \to p(\beta)$ p.s. et dans L^1.

$$\begin{aligned} Q(\log Z_{t+s}) &\geq Q(\log Z_t) + \sum_x Q(\mu_t(\omega(t)=x))Q(\log Z_s(x,\tau_t B)) \quad \text{(indéper} \\ &= Q\log Z_t + \sum_x Q(\mu_t(\omega(t)=x))Q(\log Z_s) \qquad \text{(statio} \\ &= Q(\log Z_t) + Q(\log Z_s). \end{aligned}$$

Loi du 0-1

$Q(Z_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

Convergence de l'énergie libre

Il existe $p(\beta)$ déterministe, $\frac{1}{t} \log Z_t \to p(\beta)$ p.s. et dans L^1.

$$Q(\log Z_{t+s}) \geq Q(\log Z_t) + Q(\log Z_s)$$

Suradditivité $p(\beta) = \sup_t \frac{1}{t} Q(\log Z_t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} Q(\log Z_t)$.
Concentration de la mesure $\Rightarrow$: $\frac{1}{t} \log Z_t \to p(\beta)$ ps.

Proposition

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue positive de variation quadratique

$$d\langle Z, Z\rangle_t = Z_t^2 \beta^2 I_t \, dt \quad I_t = \mu_t^{\otimes 2}(\omega_1(t) = \omega_2(t)) \quad \textcolor{red}{\text{overlap}}$$

Proposition

Soit $Z_\infty = 0$ et $\int_0^\infty I_s \, ds = +\infty$ Q p.s.
Soit $Z_\infty > 0$ et $\int_0^\infty I_s \, ds < +\infty$ Q p.s.

Proposition

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue positive de variation quadratique

$$d\langle Z, Z\rangle_t = Z_t^2 \beta^2 I_t\, dt \quad I_t = \mu_t^{\otimes 2}(\omega_1(t) = \omega_2(t)) \quad \text{overlap}$$

Preuve $M_t^\omega = e^{\beta H_t - t\beta^2/2} = 1 + \beta \int_0^t M_s^\omega dB_{\omega(s)}(s)\,, \quad H_t = \int_0^t dB_{\omega(s)}(s)$

est une martingale exponentielle $\mathcal{G}_t = \sigma(B_x(s), s \leq t, x \in \mathbb{Z}^d)$.
$Z_t = P(M_t^\omega)$=mélange de martingales=martingale (Fubini)

$$\langle Z, Z\rangle_t = P^{\otimes 2}(\langle M^\omega, M^\omega\rangle_t) = \beta^2 P^{\otimes 2}\left(\int_0^t M_s^{\omega_1} M_s^{\omega_2}\ \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))} ds\right)$$

$$= \beta^2 \int_0^t ds P^{\otimes 2}\left(M_s^{\omega_1} M_s^{\omega_2}\ \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\right)$$

Proposition

Soit $Z_\infty = 0$ et $\int_0^\infty I_s\, ds = +\infty$ Q p.s.

Proposition

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue positive de variation quadratique

$$d\langle Z, Z\rangle_t = Z_t^2 \beta^2 I_t \, dt \quad I_t = \mu_t^{\otimes 2}(\omega_1(t) = \omega_2(t)) \quad \text{overlap}$$

Proposition

Soit $Z_\infty = 0$ et $\int_0^\infty I_s \, ds = +\infty$ Q p.s.
Soit $Z_\infty > 0$ et $\int_0^\infty I_s \, ds < +\infty$ Q p.s.

Proposition

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue positive de variation quadratique

$$d\langle Z,Z\rangle_t = Z_t^2\beta^2 I_t\,dt \quad I_t = \mu_t^{\otimes 2}(\omega_1(t)=\omega_2(t)) \quad \text{overlap}$$

Proposition

Soit $Z_\infty = 0$ et $\int_0^\infty I_s\,ds = +\infty$ Q p.s.
Soit $Z_\infty > 0$ et $\int_0^\infty I_s\,ds < +\infty$ Q p.s.

$$\log Z_t = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle Z,Z\rangle_s}{Z_s^2} \quad = M_t - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_t = M_t - \frac{\beta^2}{2}\int_0^t I_s\,ds\,.$$

Sur $\{\langle M,M\rangle_\infty < +\infty\}$, $M_t \to M_\infty$ donc $\log Z_t \to M_\infty - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_\infty$.
Sur $\{\langle M,M\rangle_\infty = +\infty\}$, $M_t = o(\langle M,M\rangle_t)$ donc $\frac{\log Z_t}{\langle M,M\rangle_t} \to -\frac{1}{2}$.
On conclut avec la loi du 0-1.

Proposition

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue positive de variation quadratique

$$d\langle Z, Z\rangle_t = Z_t^2 \beta^2 I_t \, dt \quad I_t = \mu_t^{\otimes 2}(\omega_1(t) = \omega_2(t)) \quad \text{overlap}$$

Proposition

Soit $Z_\infty = 0$ et $\int_0^\infty I_s \, ds = +\infty$ Q p.s.
Soit $Z_\infty > 0$ et $\int_0^\infty I_s \, ds < +\infty$ Q p.s.

On a $p(\beta) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log Z_t = -(\beta^2/2) \lim \frac{1}{t} \int_0^t I_s \, ds$.
Si $V_t = \sup_x \mu_t(\omega(t) = x)$, alors

$$I_t = \mu_t^{\otimes 2}(\omega_1(t) = \omega_2(t)) = \sum_x \mu_t(\omega(t) = x)^2 \leq V_t \sum_x \mu_t(\omega(t) = x) = V_t$$

et $V_t^2 \leq I_t$ et

$$\text{Localisation forte} \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0\,, \ \limsup I_t \geq c \ \ Qp.s.$$

Outline

Fort désordre $\Rightarrow \beta\sqrt{R_\infty} > 1$

$$
\begin{aligned}
Q(Z_t^2) &= QP^{\otimes 2}\left(e^{\beta(H_t(\omega_1)+H_t(\omega_2))-t\beta^2}\right)\\
&= P^{\otimes 2}\left(e^{(\beta^2/2)\,\mathrm{Var}(H_t(\omega_1)+H_t(\omega_2))-t\beta^2}\right)\\
&= P^{\otimes 2}\left(e^{\beta^2\int_0^t \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\,ds}\right)
\end{aligned}
$$

Fort désordre $\Rightarrow \beta\sqrt{R_\infty} > 1$

$$
\begin{aligned}
Q(Z_t^2) &= QP^{\otimes 2}\left(e^{\beta(H_t(\omega_1)+H_t(\omega_2))-t\beta^2}\right)\\
&= P^{\otimes 2}\left(e^{(\beta^2/2)\,\mathrm{Var}(H_t(\omega_1)+H_t(\omega_2))-t\beta^2}\right)\\
&= P^{\otimes 2}\left(e^{\beta^2\int_0^t \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\,ds}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\sup_t Q(Z_t^2) = Q(e^{\beta^2 L_\infty})\,, \quad L_\infty = \int_0^\infty \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\,ds \sim exp(R_\infty^{-1})
$$

$$
R_\infty = Q(L_\infty) = \int_0^\infty r(s)\,ds\,, \quad r(s) = P(\omega_1(s)=\omega_2(s))\,.
$$

Fort désordre $\Rightarrow \beta\sqrt{R_\infty} > 1$

$$\begin{aligned} Q(Z_t^2) &= QP^{\otimes 2}\left(e^{\beta(H_t(\omega_1)+H_t(\omega_2))-t\beta^2}\right) \\ &= P^{\otimes 2}\left(e^{(\beta^2/2)\,\mathrm{Var}(H_t(\omega_1)+H_t(\omega_2))-t\beta^2}\right) \\ &= P^{\otimes 2}\left(e^{\beta^2\int_0^t \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\,ds}\right) \end{aligned}$$

$$\sup_t Q(Z_t^2) = Q(e^{\beta^2 L_\infty})\,, \quad L_\infty = \int_0^\infty \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\,ds \sim exp(R_\infty^{-1})$$

$$R_\infty = Q(L_\infty) = \int_0^\infty r(s)\,ds\,, \quad r(s) = P(\omega_1(s) = \omega_2(s))\,.$$

Si $d \leq 3$ et $\beta\sqrt{R_\infty} < 1$, alors Z_t martingale bornée dans L^2, donc $Z_\infty > 0$ ps (faible désordre).
Birkner'04 : $\exists\delta > 0$, si $\beta\sqrt{R_\infty} < 1+\delta$, alors faible désordre.

Proposition

La Fonction de partition de point à point

$$Z_t(0,x) = P(M_t^\omega \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)}) = Z_t \mu_t(\omega(t) = x)$$

satisfait

$$dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\, Z_t(0,x)\, dB_x(t)\,,$$

avec $L = \kappa\Delta$, Δ Laplacien discret.

Si $p_t(x) = P(X_t = x)$

Proposition

La Fonction de partition de point à point

$$Z_t(0,x) = P(M_t^\omega \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)}) = Z_t \mu_t(\omega(t) = x)$$

satisfait

$$dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\, Z_t(0,x)\, dB_x(t)\,,$$

avec $L = \kappa\Delta$, Δ Laplacien discret.

Si $p_t(x) = P(X_t = x)$

$$\begin{aligned}
Z_t(0,x) &= \int \mathbb{P}(d\omega) M_t^\omega \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)} = \int \mathbb{P}(d\omega)\, \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)} (1 + \beta \int_0^t M_s^\omega dB_{\omega(s)}(s) \\
&= p_t(x) + \beta \int_0^t \int P(d\omega)\, \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)} M_s^\omega dB_{\omega(s)}(s) \\
&= p_t(x) + \beta \int_0^t \int P(d\omega) p_{t-s}(\omega(s) - x) M_s^\omega dB_{\omega(s)}(s)
\end{aligned}$$

Proposition

La Fonction de partition de point à point

$$Z_t(0,x) = P(M_t^\omega \mathbf{1}_{(\omega(t)=x)}) = Z_t \mu_t(\omega(t) = x)$$

satisfait

$$dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\, Z_t(0,x)\,dB_x(t)\,,$$

avec $L = \kappa\Delta$, Δ Laplacien discret.

Si $p_t(x) = P(X_t = x)$

$$Z_t(0,x) = p_t(x) + \beta \int_0^t Z_s \mu_s(p_{t-s}(\omega(s) - x) dB_{\omega(s)}(s))$$

et on dérive (ou Fubini).

L'overlap est une semimartingale

- $dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\, Z_t(0,x)\, dB_x(t)$
- $I_t = \sum_x \mu_t(\omega(t) = x)^2 = \sum_x \left(\frac{Z_t(0,x)}{Z_t}\right)^2$
- $dI_t = dM_t + 2\sum_x U_t(x) L U_t(x) dt + \beta^2 (3 I_t^2 + I_t - 4 \sum_x U_t(x)^3)\, dt$ avec $U_t(x) = \mu_t(\omega(t) = x)$.
- Inexploitable (inexploité).

L'overlap est une semimartingale

- $dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\, Z_t(0,x)\, dB_x(t)$
- $I_t = \sum_x \mu_t(\omega(t) = x)^2 = \sum_x \left(\frac{Z_t(0,x)}{Z_t}\right)^2$
- $dI_t = dM_t + 2\sum_x U_t(x) LU_t(x) dt + \beta^2(3I_t^2 + I_t - 4\sum_x U_t(x)^3)\, dt$ avec $U_t(x) = \mu_t(\omega(t) = x)$.
- Inexploitable (inexploité).

L'overlap est une semimartingale

- $dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\,Z_t(0,x)\,dB_x(t)$
- $I_t = \sum_x \mu_t(\omega(t) = x)^2 = \sum_x \left(\frac{Z_t(0,x)}{Z_t}\right)^2$
- $dI_t = dM_t + 2\sum_x U_t(x)LU_t(x)dt + \beta^2(3I_t^2 + I_t - 4\sum_x U_t(x)^3)\,dt$ avec $U_t(x) = \mu_t(\omega(t) = x)$.
- Inexploitable (inexploité).

L'overlap est une semimartingale

- $dZ_t(0,x) = LZ_t(0,.)(x)\,dt + \beta\, Z_t(0,x)\,dB_x(t)$
- $I_t = \sum_x \mu_t(\omega(t) = x)^2 = \sum_x \left(\frac{Z_t(0,x)}{Z_t}\right)^2$
- $dI_t = dM_t + 2\sum_x U_t(x) LU_t(x) dt + \beta^2 (3I_t^2 + I_t - 4\sum_x U_t(x)^3)\,dt$ avec $U_t(x) = \mu_t(\omega(t) = x)$.
- Inexploitable (inexploité).

Représentation avec convolution

Combinons la formule d'Itô et Fubini, pour $f(x_1, x_2) = \mathbf{1}_{(x_1 = x_2)}$:

$$
\begin{aligned}
I_t = \mu_t^{\otimes 2}(f(\omega(t))) &= N_{t_0,t} + \mu_{t-t_0}^{\otimes 2}\left[P_{t_0}^{\otimes 2} f(\omega(t-t_0))\right] \\
&+ \beta^2 \int_{t-t_0}^{t} \mu_s^{\otimes 2}\left[P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s))\, \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))}\right] ds \\
&- 2\beta^2 \int_{t-t_0}^{t} \mu_s^{\otimes 3}\left[P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s))(\mathbf{1}_{(\gamma(s)=\omega_1(s))} + \mathbf{1}_{(\gamma(s)=\omega_2(s))})\right] ds \\
&+ 3\beta^2 \int_{t-t_0}^{t} \mu_s^{\otimes 2}\left[P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s))\right] I_s\, ds,
\end{aligned}
$$

avec

$$
N_{t_0,t} = \int_{t-t_0}^{t} \mu_s^{\otimes 2}\left[P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s))(\beta \sum_i dB_{\omega_i(s)}(s) - 2\frac{dZ_s}{Z_s})\right].
$$

Or $0 \le P_t^{\otimes 2} f(x_1, x_2) \le r(t) = P_t^{\otimes 2} f(x, x) \le 1$

Représentation avec convolution

Or $0 \leq P_t^{\otimes 2} f(x_1, x_2) \leq r(t) = P_t^{\otimes 2} f(x, x) \leq 1$

$$
\begin{aligned}
I_t \geq N_{t_0,t} + \beta^2 \int_{t-t_0}^{t} r(t-s) I_s \, ds \\
- 4\beta^2 \int_{t-t_0}^{t} \mu_s^{\otimes 3}(P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s)) \, \mathbf{1}_{(\gamma(s)=\omega_1(s))}) \, ds.
\end{aligned}
$$

En effet

$$
\begin{aligned}
P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s)) \, \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))} &= P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega_1(s), \omega_1(s)) \, \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))} \\
&= r(t-s) \, \mathbf{1}_{(\omega_1(s)=\omega_2(s))} \, ,
\end{aligned}
$$

Représentation avec convolution

$$
\begin{aligned}
I_t \geq N_{t_0,t} &+ \beta^2 \int_{t-t_0}^{t} r(t-s) I_s \, ds \\
&- 4\beta^2 \int_{t-t_0}^{t} \mu_s^{\otimes 3}(P_{t-s}^{\otimes 2} f(\omega(s)) \mathbf{1}_{(\gamma(s)=\omega_1(s))}) \, ds.
\end{aligned}
$$

On montre $\exists c_0 > 0, c_1 > 0$, si $J_t = I_t \mathbf{1}_{(I_t \geq c_0)}$,

$$
\limsup_{t \to +\infty} \frac{\int_0^t J_s \, ds}{\int_0^t I_s \, ds} \geq c_1 \quad \text{p.s.},
$$

Comme $\int_0^\infty I_s \, ds = +\infty$ p.s., on a p.s. $\limsup I_t \geq c_0$.