CARRON Gilles
Département de Mathématiques U.M.R.
Université de Nantes
2 rue de la Houssinière
F-44322 Nantes cedex 03
email : Gilles.Carron@math.univ-nantes.fr

le 1er décembre 2000

THÉORÈMES DE L'INDICE SUR LES VARIÉTÉS NON-COMPACTES.

Résumé. — Dans cet article, on calcule l'indice étendu d'un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne complète, non-compacte. Pour cela, on montre que cet indice est celui d'une restriction à une partie compacte avec une condition au bord. Cette condition provient d'un complexe elliptique naturellement défini sur le bord du compact. Ce résultat est une généralisation du résultat d'Atiyah-Patodi-Singer qui considérait une variété à bout cylindrique.

Mots-clés. — théorème de l'indice, inégalités de Sobolev, problème de Dirichlet, paire de Fredholm, complexe elliptique, opérateur pseudo-différentiel.

Abstract. — In this paper, we give a formula for the extended index of a Dirac type operator on a complete non-compact riemannian manifold. For this, we show that this index is the index of the restriction to a compact set together with a boundary condition. This condition comes from a natural elliptic complex on the boundary of the compact. This result generalizes a result of Atiyah-Patodi-Singer about manifolds with cylindrical end.

Key-words. — Index theorem, Sobolev inequalities, Dirichlet problem, Fredholm pair, elliptic complex, pseudo-differential operator.

0. Introduction.

Le but de cet article est de préciser l'intuition selon laquelle l'indice d'un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne non-compacte s'exprime comme la somme d'une contribution locale donnée par le théorème de l'indice de Atiyah-Singer et d'une contribution de "l'infini".

Citons d'abord quelques résultats qui justifient cette intuition : Dans [A-P-S], Atiyah, Patodi, Singer étudient les opérateurs de type Dirac sur une variété riemannienne à bout cylindrique, leur étude montre qu'on peut se ramener à considérer la restriction de l'opérateur sur une partie compacte si on se donne une condition au bord. Grosso modo, un spineur, qui vérifie cette condition, se prolonge en un spineur harmonique L^2 hors du compact. Ainsi cette condition au bord est la contribution de l'infini. Le deuxième résultat est celui de M. Gromov et H.B. Lawson ([G-L]) : lorsque (M^n, g) est une variété spin complète de dimension paire dont la courbure scalaire est uniformément strictement positive hors d'un compact, alors ils montrent que l'espace des spineurs harmoniques L^2 est de dimension finie et même mieux l'opérateur de Dirac est Fredholm sur son domaine. Ils montrent enfin le théorème de l'indice relatif :

si deux telles variétés sont isométriques hors d'un compact alors la différence des indices de leurs opérateurs de Dirac est la différence des intégrales de leurs $\hat{A}$-formes.

La preuve du théorème de l'indice relatif fut améliorée et généralisée par Donnelly ([Do]), Borisov-Müller-Schrader ([B-M-S]) , Bunke ([Bu]), Anghel ([A1]) et Roe ([R1]). Le dernier résultat est celui de J. Brüning qui calcule dans [Br] l'indice L^2 des opérateurs de type Dirac sur des variétés qui à l'infini sont des produits tordus, il montre qu'en compactifiant la variété pour obtenir une variété compacte à singularités, la condition L^2 se transforme en une condition sur le lieu singulier. Ainsi la contribution de l'infini est transformée en une contribution des singularités. Il utilise alors les techniques des opérateurs réguliers singuliers de [Br-S] pour exprimer cet indice.

Le but de cet article est d'unifier ces trois résultats dans un cadre plus général et de justifier dans ce cadre là notre intuition, en précisant même la contribution de l'infini. La classe d'opérateurs que nous considérons est celle des opérateurs de type Dirac non-parabolique à l'infini définie dans [C1] ; rappelons cette définition :

0.1. Définition. — Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M^n, g), on dira que D est **non-parabolique à l'infini** s'il existe un compact K de M tel que pour tout ouvert U relativement compact dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$\forall \sigma \in C_0^\infty(M-K, E)\ ,\ C(U)\, \|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)}. \tag{0.2}$$

Commençons par rappeler les principales propriétés des opérateurs de type Dirac non-parabolique à l'infini , elles ont été démontrées dans [C1].

0.3. Théorème. — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est non-parabolique à l'infini alors*

$$\dim\{\sigma \in L^2(E),\, D\sigma = 0\} < \infty\ ;$$

de plus si $\tilde{K}$ est un compact contenant K dans son intérieur, et si on définit l'espace *de Sobolev $W(E)$ comme le complété de $C_0^\infty(E)$ muni de la norme*

$$\sigma \mapsto \sqrt{\int_{\tilde{K}} |\sigma|^2 + \int_M |D\sigma|^2}$$

alors $W(E)$ s'injecte naturellement dans H^1_{loc}, et l'opérateur $D\,:\,W(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm

En fait cette propriété caractérise les opérateurs non-parabolique à l'infini . Remarquons que nous avons les inclusions $H^1(E) \subset W(E) \subset H^1_{loc}(E)$.

Exemples. — Les opérateurs considérés par Gromov et Lawson sont non-parabolique à l'infini ; aussi les opérateurs de Gauss-Bonnet et de signature sur les variétés plates à l'infini sont non-paraboliques à l'infini . Nous verrons dans cet article que sur certains produits tordus les opérateurs de Dirac et de Gauss-Bonnet sont non-paraboliques à l'infini .

Enfin, nous avions montré que les opérateurs de type Dirac sur les variétés à bout cylindrique sont non-paraboliques à l'infini . Dans ce cas, les solutions à l'équation $D\sigma = 0$ qui sont dans l'espace W sont exactement celle que M. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer appellent solutions étendues dans [A-P-S]. C'est pourquoi on appelle indice étendu l'indice de $D\,:\,W(E) \longrightarrow L^2(E)$:

$$\operatorname{ind}_e D = \dim \ker_W D - \dim \ker_{L^2} D.$$

Mais on sait qu'une solution L^2 à l'équation $(D\sigma = 0)$ est dans W, ainsi l'indice étendu de D est la codimension de l'espace des solutions L^2 dans l'espace des solutions étendues ; intuitivement, c'est la dimension des valeurs à l'infini des solutions de cette équation puisque les solutions L^2 sont celles qui s'annulent à l'infini (en un sens L^2). Lorsque E est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué, i.e.

$$E = E^+ \oplus E^- \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix},$$

on note $h_\infty(D^+) = \dim(\ker_W D^+ / \ker_{L^2} D^+)$, alors on relie les indices étendu et L^2 de $D^+\,:\,C^\infty(E^+) \longrightarrow C^\infty(E^-)$ par

$$\operatorname{ind}_e D^+ = h_\infty(D^+) + \operatorname{ind}_{L^2} D^+ = h_\infty(D^+) + \dim \ker_{L^2} D^+ - \dim \ker_{L^2} D^-.$$

Remarquons qu'il est impropre de parler d'indice L^2 puisque celui ci ne correspond pas à l'indice d'un opérateur Fredholm. Dans ([C1]), nous avions aussi montré que le théorème de l'indice relatif avait lieu pour les opérateurs de type Dirac non-parabolique à l'infini , mais pour l'indice tendu pas pour l'indice L^2 ; ce qui montre la nécessité de considérer l'indice étendu plutôt que l'indice L^2. En particulier, ceci montrait que l'indice étendu de D ne dépend que de la géométrie à l'infini de D. On va ici exprimer cet indice en fonction d'un complexe elliptique naturellement défini sur une hypersurface voisine de "l'infini ". Ce complexe nous permettra aussi d'exprimer l'indice étendu de D^+ comme l'indice de la restriction de D^+ à une partie compacte pour une condition au bord reliée à ce complexe.

En fait, nous pouvons résoudre le problème de Dirichlet extérieur pour les opérateurs non-paraboliques à l'infini : si $\Omega \subset M$ est un voisinage de l'infini à bord lisse sur lequel on a les estimées (0.2) alors pour $\sigma \in C^\infty(\partial\Omega, E)$ il existe une unique solution $\mathcal{E}(\sigma)$ aux équations

$$\begin{cases} D^2\mathcal{E}(\sigma) = 0 \\ \mathcal{E}(\sigma) = \sigma \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

qui, à l'infini, se comporte comme un élément de $W(E)$. On remarque alors que $D\mathcal{E}(\sigma)$ est harmonique sur Ω, c'est l'extension harmonique de $D\mathcal{E}(\sigma)\Big|_{\partial\Omega}$. Ainsi si on définit l'opérateur de Dirac-Neumann $T_\Omega : C^\infty(\partial\Omega, E) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega, E)$ par

$$T_\Omega(\sigma) = D(\mathcal{E}\sigma)|_{\partial\Omega}$$

alors on peut énoncer le résultat fondamental suivant :

0.4. THÉORÈME. — *$T_\Omega \circ T_\Omega = 0$, et T_Ω est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 et son symbole principal est*

$$\sigma(T_\Omega)(x,\xi) = -n.|\xi| + i\xi,\ \xi \in T_x^*(\partial\Omega)\,,$$

où n est la normale intérieure à $\partial\Omega$ en x.

Ainsi T_Ω définit un complexe elliptique sur $\partial\Omega$. Et le quotient $\ker T_\Omega / \operatorname{Im} T_\Omega$ est de dimension finie et il est isomorphe à $\ker T_\Omega \cap \ker T_\Omega^*$. Cet espace de cohomologie défini par T_Ω s'interprète ainsi : c'est l'espace des solutions de ($D\sigma = 0$ sur Ω) qui sont dans W quotienté par l'espace de celles qui sont L^2 :

$$\ker T_\Omega / \operatorname{Im} T_\Omega \simeq \{\sigma \in W(\Omega, E)\ ,\ D\sigma = 0\} / \{\sigma \in L^2(\Omega, E)\ ,\ D\sigma = 0\}.$$

En effet, le noyau de T_Ω est formé des éléments de $C^\infty(\partial\Omega, E)$ qui se prolongent en des solutions de $D\sigma = 0$ qui sont à l'infini dans W tandis que l'image de T_Ω est formée de celles qui se prolongent en une solution L^2.

La définition de T_Ω est similaire à celle de l'opérateur de Neumann $\mathcal{N}$ qui à une fonction lisse, sur le bord d'une variété riemannienne compacte à bord N, associe la dérivée normale de son extension harmonique :

$$\mathcal{N} f = \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{E}(f),\ \text{avec } \Delta\mathcal{E}(f) = 0,\ \text{sur } N,\ \text{et } \mathcal{E}(f) = f \text{ sur } \partial N.$$

Il est bien connu que l'opérateur de Neumann est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 ([H],[T]); la preuve du théorème (0.4) consistera essentiellement à se ramener au cas de l'opérateur de Neumann.

Remarquons que si E est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué alors T se décompose en $T_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & T_\Omega^- \\ T_\Omega^+ & 0 \end{pmatrix}$. L'opérateur de Dirac-Neumann T_Ω est aussi lié aux projecteurs de Calderòn ([Ca], [S]). Un tel opérateur est employé par Atiyah-Patodi-Singer pour calculer la signature d'une variété compacte à bord : soit $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ un opérateur de type Dirac sur une variété compacte à bord K tel qu'un voisinage du bord de K est isométrique au produit riemannien $]-\varepsilon, 0] \times \partial K$ et que sur ce voisinage $D = n(\frac{\partial}{\partial r} + A)$, où A est un opérateur de type Dirac sur ∂K. Si P est le projecteur orthogonal sur le sous-espace de

$L^2(\partial K, E^+)$ engendré par les vecteurs propres de A^+ associés aux valeurs propres strictement négatives, alors P est un projecteur de Calderòn ; en particulier c'est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0. Et si on recolle le cylindre $[0,\infty[\times\partial K$ à K, pour obtenir une variété à bout cylindrique (M,g) et un opérateur $\tilde{D}$ sur M alors le noyau de $T = T_{[0,\infty[\times\partial K}$ n'est autre que le noyau de P, et l'indice étendu de $\tilde{D}^+$ est l'indice de $D^+ \,:\, H^1(K, E^+, \ker T^+) \longrightarrow L^2(K, E^-)$, où on a noté $H^1(K, E^+, \ker T^+)$ le sous-espace de $H^1(K, E^+)$ formé des éléments qui en restriction à ∂K sont dans le noyau de T^+. En fait, nos travaux montrent que ceci est général aux opérateurs non-paraboliques à l'infini : si $D \,:\, C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini alors si T_Ω est l'opérateur de Dirac-Neuman défini sur $\partial\Omega$ alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \mathrm{ind}\left(D^+ \,:\, H^1(K, E^+, \ker T^+_\Omega) \longrightarrow L^2(K, E^-)\ \right).$$

Nous aurions pu exprimer alors cet indice grâce aux travaux de Booss, Wojciechowski ([B-W]), mais nous préférons utiliser une autre approche, plus directe à nos yeux, qui est celle du théorème de Bojarski. Ce résultat relie l'indice d'un opérateur de type Dirac sur une variété compacte à l'indice d'une paire de Fredholm. Rappellons qu'un couple (H_1, H_2) de sous-espace fermés d'un espace de Hilbert est une paire de Fredholm si les deux conditions suivantes sont vérifiées

i) $\dim H_1 \cap H_2 < \infty$,

ii) $H_1 + H_2$ est fermé et $\dim H_1^\perp \cap H_2^\perp < \infty$.

Dans ce cas on note $\mathrm{ind}(H_1, H_2) = \dim\left(H_1 \cap H_2\right) - \dim\left(H_1^\perp \cap H_2^\perp\right)$ l'indice de cette paire de Fredhlom.

Soit $D \,:\, C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini et Ω un voisinage de l'infini à bord lisse sur lequel on a les estimées (0.2). Il est bien connu que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet sur le compact $K = M - \Omega$ car les conditions de Dirichlet sont régulières pour tout opérateur fortement elliptique d'ordre 2. Ceci permet de définir, de la même façon, un opérateur de Dirac-Neumann $T_K \,:\, C^\infty(\partial\Omega, E) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega, E)$ défini par $T_K(\sigma) = D(\mathcal{E}\sigma)|_{\partial\Omega}$, T_K est aussi un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 et nous avons le théorème de Bojarski généralisé

0.5. Théorème. — *Pour tout réel s,* $(\ker_{H^s} T_K^+, \ker_{H^s} T_\Omega^+)$ *et* $(\ker_{H^s} T_K, \ker_{H^s} T_\Omega)$ *sont des paires de Fredholm et on a*

$$\mathrm{ind}_e\, D = \mathrm{ind}(\ker_{H^s} T_K, \ker_{H^s} T_\Omega),$$
$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \mathrm{ind}(\ker_{H^s} T_K^+, \ker_{H^s} T_\Omega^+).$$

Dans le cas des variétés compactes, ce résultat fut conjecturé par Bojarski [Bo], et prouvé par Booss-Wojciechowski [B-W]. A l'aide des propriétés des indices de paires de Fredholm, il est alors facile de démontrer le théorème de l'indice relatif. Nous pouvons aussi en déduire le théorème suivant :

0.6. Théorème. — *Si $D \,:\, C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini et Ω est un voisinage de l'infini à bord lisse sur* *lequel les estimées (0.2) ont lieu alors*

$$\operatorname{ind}_e D = \frac{1}{2}\dim\frac{\ker T_\Omega}{\operatorname{Im} T_\Omega} = \dim\frac{\ker T_\Omega^+}{\operatorname{Im} T_\Omega^-} = \dim\frac{\ker T_\Omega^-}{\operatorname{Im} T_\Omega^+}.$$

Ce résultat est la généralisation d'un résultat d'Atiyah-Patodi-Singer qui ont montré que dans le cas d'un opérateur sur une variété riemannienne à bout cylindrique, la dimension de l'espace des valeurs à l'infini des solutions étendues est égale à la dimension du noyau de A^+ (la partie paire de la partie tranversale de l'opérateur, [A-P-S]); en effet $\ker T_\Omega^+ / \operatorname{Im} T_\Omega^-$ s'identifie à $\ker\left(T_\Omega^+ + (T_\Omega^-)^*\right)$, et dans ce cadre l'opérateur $T_\Omega^+ + (T_\Omega^-)^*$ est précisement A^+. Avec la même méthode, on déduira la formule suivante des travaux de Atiyah-Patodi-Singer [A-P-S] :

0.7. Théorème. — *Soit $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini sur une variété M ; on suppose que K est un compact hors duquel on a les estimées (0.2), et qu'un voisinage de ∂K est isométrique au produit riemannien $]-\varepsilon, \varepsilon[\times \partial K$ et qu'au dessus de ce voisinage le fibré E et l'opérateur D respecte cette géométrie, en particulier sur ce voisinage $D \simeq n.(\frac{\partial}{\partial r} + A)$, où $A : C^\infty(\partial K, E) \longrightarrow C^\infty(\partial K, E)$ est un opérateur de type Dirac. Alors*

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \int_K \alpha_{D^+} + \frac{\eta_{A^+}(0) - \dim\ker A^+}{2} + \operatorname{ind}(\mathcal{H}_{\leq 0}, \ker T^+_{M-K}),$$

où

a) α_D est la forme caractéristique définie par le symbole principal de D^+.

b) $\eta_{A^+}(0)$ est la valeur en 0 de l'extension méromorphe de

$$\eta_{A^+}(s) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A^+} \operatorname{sign}\lambda |\lambda|^{-s},$$

en fait, cette extension est holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > -1/2$,

c) $\mathcal{H}_{\leq 0}$ est le sous-espace vectoriel de $L^2(\partial K, E^+)$ engendré par les espaces propres de A^+ associés aux valeurs propres négatives ou nulles de A^+.

Cet article est découpé en cinq parties : dans la première, on montre comment résoudre le problème de Dirichlet à l'extérieur d'un compact, ceci à l'aide de la seule estimée (0.2) ; on y introduira les espaces de Sobolev nécessaires. La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'opérateur de Dirac-Neumann, dans la troisième, on identifiera le noyau et l'image de l'opérateur de Dirac-Neumann, grâce au travaux de Calderòn-Seeley ([Ca], [S]). Ces résultats nous permettront, dans une quatrième partie, de démontrer le théorème de Bojarski et les formules de l'indice qui en découlent. Enfin dans la cinquième partie, on calculera quelques indices étendus, ceci grâce à nos travaux ; on s'interesse aux opérateurs de Dirac et de Gauss-Bonnet sur les produits tordus et on obtiendra par exemple les résultats suivants :

0.8. Théorème. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne dont un voisinage de l'infini est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)g)$ où la fonction f vérife l'une des deux propriétés suivantes* *i)* $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$,

ii) $f(r) = ar$,

alors l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini .

De plus, si M est de dimension paire $2k$ alors

si pour $r > 1$ on a $f(r) = ar$, alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \chi(M) + \sum_{0\le j\le k-1} (-1)^{j+1}\mathrm{b}_j(\Sigma) + \beta.$$

où si k est impair alors $\beta = \mathrm{b}_k(\Sigma) + \mathrm{b}_{k-1}(\Sigma)$; et si k est pair alors β est le nombre de valeurs propres non-nulles inférieures ou égales à a (répétées avec multiplicité) du Laplacien agissant sur les $(k-1)$ formes différentielles cofermées de Σ.

Et si $f = e^{-r}$ alors

$$\mathrm{ind}_{L^2}\, D^+_{GB} = \mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \chi(M) + \sum_{0\le j\le k-1} (-1)^{j}\mathrm{b}_j(\Sigma).$$

Si M est de dimension impaire orientée et si $f(r) = e^{-r}$, alors on a

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{\mathrm{b}_k(\Sigma)}{2}.$$

Sur ces variétés N. Anghel ([A2]) et J. Brüning ([Br]) ont obtenu des formules pour l'indice L^2. Ces formules de l'indice L^2 comportent toujours un terme incalculable provenant des solutions étendues.

Enfin, nous avons utilisé les résultats de cet article pour étudier les espaces de formes harmoniques L^2 ([C2]). Et nos résultats permettent de répondre en partie à une question de J. Dodziuk ; dans [D], L'auteur rappelle que suivant Visentini, on sait que l'espace des formes harmoniques L^2 d'une variété riemanienne complète plate à l'infini est de dimension finie, J. Dodziuk pose alors la question d'établir des liens entre ces espaces et la topologie de la variété. Concernant certaines varits plates l'infini, on montre, dans ([C2]), qu'une suite exacte lie la cohomologie à support compact et ces espaces de formes harmoniques L^2 et on donne une formule pour l'indice L^2 de l'opérateur de Gauss-Bonnet.

Remerciement : *Je tiens à remercier E. Giroux et B. Sevennec pour l'attention qu'ils ont portés à mes travaux. Je remercie aussi le rapporteur pour m'avoir donner la courte preuve de la proposition 1.1.*

Notations. — Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M, g), i.e. D est un opérateur différentiel d'ordre 1 symétrique et le symbole principal de D^2 est la métrique g

$$\sigma(D^2)(x,\xi) = g(\xi,\xi)\,\mathrm{Id}_{E_x},\ \xi \in T^*_x M.$$

Ainsi l'opérateur $D^2 = \Delta$ est un Laplacien généralisé. Alors le symbole principal de D induit une action du fibré de Clifford de (M, g) sur E : le symbole principal de D est alors la multiplication de Clifford par $i\xi$.

Si $U \subset M$ on note $C_0^\infty(U,E)$ l'espace des sections de $E|_U$ qui sont lisses à support compact dans U ; ainsi si U est ouvert un élément de $C_0^\infty(U,E)$ s'annule sur le bord de U et si U est fermé à bord lisse compact, alors un élément de $C_0^\infty(U,E)$ est lisse jusqu'au bord de U. On notera aussi $H^k(U,E)$, ou H^k les sections de $E|_U$ qui sont elles et leurs images par D^l, $l \in \{1,...,k\}$ dans L^2, cet espace est normé par

$$\sigma \mapsto \sqrt{\sum_{l=0}^{k} \|D^l\sigma\|^2_{L^2(U)} + \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \frac{\partial^l}{\partial n^l}\sigma \right\|^2_{H^{k-1/2-l}(\partial U)}}\ ,$$

où on a noté $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale intérieure le long du bord de U.

Dans les trois paragraphes suivant, on suppose que $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne ouverte (Ω, g) à bord compact lisse et de plus on suppose que l'on a les estimées suivantes : pour tout ouvert U borné dans Ω, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$\forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E)\ ,\ C(U)\,\|\sigma\|_{L^2(U)} \le \|D\sigma\|_{L^2(\Omega)}.$$

On notera Σ le bord de Ω.

Exemples. —

i) Si $\overline{\Omega}$ est compact, tout opérateur de type Dirac sur Ω vérifie ceci. En effet, la première valeur propre pour le problème de Dirichlet

$$D^2\sigma = \lambda\sigma,\ \ \sigma|_\Sigma = 0$$

est strictement positive, car une solution de ces équations pour la valeur propre nulle, vérifierait $D\sigma = 0, \sigma|_\Sigma = 0$ et donc serait nulle par le principe de prolongement unique pour les opérateurs de type Dirac. Ainsi il y a une constante $\Lambda > 0$, telle que l'on ait l'inégalité de Poincaré

$$\forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega,E)\ ,\ \Lambda\|\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|D\sigma\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

ii) Suivant [C1], si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne, lorsqu'une restriction de D à un voisinage de l'infini vérifie ces estimées alors on dit que D est non-parabolique à l'infini .

1. Résolution du problème de Dirichlet.

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\sigma = 0 \\ \sigma = \tau, \quad \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Où l'unicité aura lieu pour σ et τ dans certains espaces de Sobolev.

1.a. Les espaces de Sobolev. — On définit comme dans [C1], deux espaces de Sobolev :

$W_0(E)$ qui est le complété de $C_0^\infty(\Omega, E)$ muni de la norme $\sigma \mapsto \|D\sigma\|_{L^2(\Omega)}$, et

$W(E)$ qui est le complété de $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ muni de la norme

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\sigma\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|D\sigma\|^2_{L^2(\overline{\Omega})}}\ ,$$

où K est un voisinage compact de Σ dans $\overline{\Omega}$. Tout d'abord, nous remarquons que

1.1.PROPOSITION. — *L'espace $W(E)$ ne dépend pas du compact choisi.*

Preuve. — En effet, appellons N_K cette norme, et soit K' un autre voisinage compact de Σ qui contienne K en son intérieur. On a bien sur

$$N_K \leq N_{K'}.$$

Montrons que ces deux normes sont équivalentes, il suffit de montrer que si $U = \mathrm{int}(K') - K$, alors il existe une constante C tel que pour tout $\sigma \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$:

$$\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq C\left(\|\sigma\|_{L^2(K)} + \|D\sigma\|_{L^2}\right).$$

Soit ρ une fonction lisse valant 1 sur $\Omega - K$ et nulle sur un voisinage de Σ, d'après l'hypothèse faite, il y a une constante $C(U) > 0$ tel que si $\sigma \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ alors

$$C(U)\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\rho\sigma\|_{L^2} \leq \|d\rho\sigma\|_{L^2} + \|\rho D\sigma\|_{L^2} \leq C\left(\|\sigma\|_{L^2(K)} + \|D\sigma\|_{L^2}\right)$$

avec $C = \|d\rho\|_{L^\infty} + \|\rho\|_{L^\infty}$. C'est bien ce qu'il fallait démontrer. ■

Ce résultat montre d'abord que l'espace $W(E)$ s'injecte dans $H^1_{loc}(\overline{\Omega}, E)$, i.e que l'inclusion de $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ dans H^1_{loc} se prolonge par continuité à $W(E)$. Ainsi il existe une application restriction

$$W(E) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E)$$

et nous avons

1.2. PROPOSITION . — *Une norme équivalente sur $W(E)$ est donnée par*

$$N(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)} + \int_\Omega |D\sigma|^2}\ .$$

Preuve. — D'après ce qui précède, il suffit de montrer que l'on ne peut trouver de suite $(\sigma_l)_l$ d'éléments de $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ telle que

$$N_K(\sigma_l) = 1, \lim_{l\to\infty} N(\sigma_l) = 0\ ;$$

dans ce cas, la suite (σ_l) est bornée dans W, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite que cette suite converge faiblement dans W vers σ_∞. Par continuité de

$D : W \longrightarrow L^2$, on a $D\sigma_\infty = 0$ et grâce à l'inclusion continue $W(E) \longrightarrow H^{1/2}(\Sigma)$ on a $\sigma_\infty|_\Sigma = 0$. Ces deux propriétés impliquent que σ_∞ est nulle grâce à la propriété de prolongement unique pour les opérateurs de type Dirac. Ainsi la suite (σ_l) converge faiblement vers 0 dans W, or l'application restriction à K est continue de W dans $H^1(K)$ et donc compacte de W dans $L^2(K)$, ainsi $\lim_{l\to\infty} \|\sigma_l\|_{L^2(K)} = 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. ■

Ce dernier résultat montre que $W_0(E)$ est le sous-espace vectoriel fermé de $W(E)$ formé des éléments de trace nulle.

1.b. Résolution du problème de Dirichlet. — On peut maintenant énoncer le théorème suivant

1.3. THÉORÈME. — *Si $\sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E)$ alors il existe un unique $\mathcal{E}(\sigma) \in W(E)$ tel que*

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{E}(\sigma) = 0 \\ \mathcal{E}(\sigma) = \sigma \quad \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

De plus l'application $\mathcal{E} : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E) \longrightarrow W(E)$ est continue

Preuve. — Une telle solution est la projection orthogonale de la fonction nulle sur le sous-espace affine de $W(E)$ formé des éléments dont la trace sur Σ est σ :

Pour l'existence, si $\sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E)$, alors on peut l'étendre en une section $\bar\sigma \in H^1(E)$ qui est à support compact dans $\overline{\Omega}$, de plus on peut le faire de façon à avoir les estimées uniformes suivantes

$$\|D\bar\sigma\|_{L^2(\Omega,E)} \le C\|\sigma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

alors on a pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega, E)$

$$< \Delta\phi, \bar\sigma >= \int_\Omega (D\phi, D\bar\sigma) =< \phi, \bar\sigma >_W$$

Où on a choisit sur W la norme N. Ainsi si h est la projection orthogonale de $\bar\sigma$ sur $W_0(E)$ alors, par le théorème de Pythagore, on a $\|h\|_W^2 + \|\bar\sigma - h\|_W^2 = \|\bar\sigma\|_W^2$, et on a

$$\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega, E)\ ,\ \int_\Omega (D\phi, D\bar\sigma) = \int_\Omega (D\phi, Dh) = \int_\Omega (\Delta\phi, h),$$

ce qui implique que $\mathcal{E}(\sigma) = \bar\sigma - h$ résoud bien le problème de Dirichlet, puisque la trace de h est nulle. L'unicité résulte du fait que si $\sigma \in W(E)$ vérifie $\Delta\sigma = 0,\ \sigma = 0$ sur Σ alors on a $\sigma \in W_0(E)$ et

$$\int_\Omega (\Delta\phi, \sigma) = \int_\Omega (D\phi, D\sigma) = 0$$

cette égalité étant valable pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega, E)$ et donc par continuité, elle a lieu pour tout élément de $W_0(E)$ et donc on aurait $D\sigma = 0$ ce qui implique $\sigma = 0$ par hypothèse. ■

Ainsi l'espace $W_0(E)$ est l'orthogonal dans $W(E)$ de l'espace des solutions à l'équation $\left(\Delta\sigma = 0,\ \sigma \in W(E)\right)$. On peut alors introduire d'autres espaces de Sobolev :

$W_0^k(E)$ qui est le complété de $C_0^\infty(\Omega, E)$ muni de la forme quadratique

$$\sigma \mapsto \sum_{l=1}^{k-1} \left\| \frac{\partial^l}{\partial n^l}\sigma \right\|^2_{H^{k-1/2-l}(\Sigma)} + \sum_{l=1}^{k} \|D^l\sigma\|^2_{L^2},$$

$W^k(E)$ qui est le complété de $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ muni de la forme quadratique

$$\sigma \mapsto \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \frac{\partial^l}{\partial n^l}\sigma \right\|^2_{H^{k-1/2-l}(\Sigma)} + \|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \sum_{l=1}^{k} \|D^l\sigma\|^2_{L^2},$$

où K est un voisinage compact de Σ dans $\overline{\Omega}$.

On montre comme précédemment que cette norme et donc cet espace ne dépend pas du compact choisi et qu'il s'injecte dans H^k_{loc}. Donc l'application restriction $W^k(E) \longrightarrow H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E)$ est bien définie. On en déduit le résultat suivant

1.4. PROPOSITION. — *Si $\sigma \in H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E)$, alors $\mathcal{E}(\sigma) \in W^k(E)$, et plus exactement, $\mathcal{E} : H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E) \longrightarrow W^k(E)$ est continue. Notamment si $\sigma \in C^\infty(\Sigma, E)$ alors $\mathcal{E}(\sigma) \in C^\infty(\overline{\Omega}, E)$.*

2. L'opérateur de Dirac-Neumann.

2.a. Définition. — Maintenant, remarquons que si $\sigma \in C^\infty(\Sigma, E)$, alors on a $D\left(D\mathcal{E}(\sigma)\right) = 0$, et donc $D\mathcal{E}(\sigma)$ est l'extension harmonique de $D\mathcal{E}(\sigma)|_\Sigma$. Ainsi si on considère l'opérateur de Dirac-Neumann $T : C^\infty(\Sigma, E) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, E)$ défini par

$$T(\sigma) = \left(D\mathcal{E}(\sigma)\right)\Big|_\Sigma$$

alors on a la

2.1. PROPOSITION. —

$$T \circ T = 0.$$

De plus, $T : H^{k+1/2}(\Sigma, E) \longrightarrow H^{k-1/2}(\Sigma, E)$ est continu.

Ceci est clair sauf la continuité de $T : H^{1/2}(\Sigma, E) \longrightarrow H^{-1/2}(\Sigma, E)$. Pour ceci on utilise le résultat suivant de Calderón qui permet de définir une trace sur Σ pour des éléments de $H^s_{loc}(\Omega, E)$ qui vérifient une équation aux dérivées partielles elliptique (cf [Ca], [P], [S]) :

2.2. THÉORÈME. — *Soit G une variété riemannienne compacte à bord lisse et $D : C^\infty(G, F) \longrightarrow C^\infty(G, F)$ un opérateur de type Dirac ; pour $s \in \mathbf{R}$ on* *définit* $K_s = \{\sigma \in H^s(F),\ D\sigma = 0\}$. *Soit* $\partial G \times [0,1[\subset G$ *un voisinage tubulaire du bord de* G *alors pour* $\sigma \in K_s$ *la limite*

$$R\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma|_{\partial G \times \{\varepsilon\}}$$

existe en norme $H^{s-1/2}(\partial G, F)$. *De plus, si on note* H_s *l'image de* R *dans* $H^{s-1/2}(\partial G, F)$ *alors* H_∞ *est dense dans* H_s *et il existe un opérateur continu* $P\ :\ H^{s-1/2}(\partial G, F) \longrightarrow K_s$ *tel que* $R \circ P$ *soit un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* 0 *qui est une projection sur* H_s.

La continuité voulue résulte alors du fait que si $\sigma \in H^{1/2}(\Sigma, E)$ alors $D\mathcal{E}(\sigma)$ est dans $L^2(\Omega, E)$; il suffit alors de restreindre $D\mathcal{E}(\sigma)$ à un voisinage compact à bord lisse de $\Sigma \subset \Omega$ et d'appliquer le théorème precédent.

2.3. Remarque. — En particulier ce théorème dit que puisqu'il n' y a pas de solution lisse non nulle sur G aux équations $D\sigma = 0,\ R\sigma = 0$ il n'y en a pas qui soit seulement de carré sommable.

2.b. Propriété de T. — Nous allons montrer ici la principale propriété de T :

2.4. THÉORÈME. — *T est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 et son symbole principal est*

$$\sigma(T)(x,\xi) = -n.|\xi| + i\xi,\ \xi \in T^*_x\Sigma,$$

où n est la normale intérieure à Σ en x.

Preuve. — Selon [A-T], il existe une connexion $\nabla\ :\ C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(T^*\Omega \otimes E)$ telle que

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i.\nabla_{e_i} \text{ où } \{e_i\}_i \text{ est un repère orthonormé local.}$$

Cependant la connexion n'est pas forcément compatible avec la multiplication de Clifford donnée par le symbole principal de D. Si $(n, e_2, ..., e_n)$ est un repère orthonormé local autour de $x_0 \in \Sigma$ et si $\sigma \in C^\infty(\Sigma, E)$ alors $D\mathcal{E}(\sigma) = n.\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{E}(\sigma)(x) + \sum_{i=2}^n e_i.\nabla_{e_i}\sigma(x)$ dans un voisinage de x_0 ; ceci montre que

$$T = N + A$$

où $A\ :\ C^\infty(\Sigma, E) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, E)$ est l'opérateur de type Dirac défini par $A = \sum_{i=2}^n e_i.\nabla_{e_i}$ et où $N\ :\ C^\infty(\Sigma, E) \longrightarrow C^\infty(\bar{\Omega}, E)$ est défini par

$$N\sigma = \left(n\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{E}(\sigma)\right)|_\Sigma.$$

Il suffit donc de montrer que N est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. Ce résultat est bien connu pour le Laplacien d'une variété compacte agissant sur les fonctions, puisque c'est l'opérateur de Neumann. On va se ramener à ce cadre. Soit $\Sigma \times [0,2] \subset \Omega$ un voisinage tubulaire de Σ. On définit alors l'opérateur

$N_0 : C^\infty(\Sigma, E) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, E)$ par $N_0(\sigma) = \left(n.\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{E}_0(\sigma)\right)|_\Sigma$ où $\mathcal{E}_0(\sigma)$ est la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{E}_0(\sigma) = 0 & \text{sur } \Sigma\times]0,1[\\ \mathcal{E}_0(\sigma) = \sigma & \text{sur } \Sigma\times\{0\} \\ \mathcal{E}_0\sigma = 0, & \text{sur } \Sigma\times\{1\} \end{cases}$$

Ainsi sur $\Sigma\times]0,1[$, $\tau = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)(\sigma)$ est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\tau = 0 & \text{sur } \Sigma\times]0,1[\\ \tau = 0 & \text{sur } \Sigma\times\{0\} \\ \tau = \mathcal{E}(\sigma)|_{\Sigma\times\{1\}} & \text{sur } \Sigma\times\{1\} \end{cases}$$

Mais, si $s > 1$, on a les estimées

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(\sigma)\|_{H^s(\Sigma\times[\frac{1}{2},1],E)} &\leq C^{te}\|\mathcal{E}(\sigma)\|_{H^1(\Sigma\times[0,2],E)} \\ &\leq C^{te}\|\sigma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Ceci car $\mathcal{E}(\sigma)$ vérifie l'équation elliptique $\Delta\left(\mathcal{E}(\sigma)\right) = 0$. En prenant la restriction sur $\Sigma\times\{1\}$, on a l'estimée

$$\|\mathcal{E}(\sigma)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma\times\{1\},E)} \leq C^{te}\ \|\sigma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}\ ;$$

et donc par régularité elliptique du problème de Dirichlet, on a

$$\|\tau\|_{H^s(\Sigma\times[0,1],E)} \leq C_s^{te}\|\sigma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

Ce qui montre que

$$\left\|n\frac{\partial}{\partial r}\tau\right\|_{H^{s-1}(\Sigma\times[0,1],E)} \leq C_s^{te}\|\sigma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)},$$

et par restriction on a

$$\|(N - N_0)\sigma\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\Sigma,E)} \leq C_s^{te}\|\sigma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)},$$

donc $(N - N_0)$ est un opérateur d'ordre $-\infty$ i.e un opérateur lissant. Pour montrer le théorème, il suffit donc de prouver que N_0 est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. La preuve de ce fait est la même que pour le Laplacien agissant sur les fonctions, il suffit de reprendre la méthode des potentiels de simple et double couches utilisée dans [T]. Et le calcul fait dans ce livre montre que

$$\sigma(N_0)(x,\xi) = -n.|\xi|,\ \xi\in T_x^*\Sigma,$$

ce qui achève la preuve du théorème car le symbole de A est la multiplication de Clifford par $i\xi$. ■

2.c. Analyse pour l'opérateur T. — Tout d'abord, nous allons identifier l'adjoint (formel) de T :

2.5. Proposition. — *Si σ, $\tau\in C^\infty(\Sigma, E)$ alors on a*

$$\int_\Sigma (nT\sigma,\tau) = \int_\Omega \left(D\mathcal{E}(\sigma), D\mathcal{E}(\tau)\right)\ ;$$

ainsi $nT = (nT)^*$, i.e. T est antisymétrique pour la structure symplectique de $L^2(\Sigma, E)$ donnée par la multiplication de Clifford par n.

Preuve. — Si $\tau \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ et si $\sigma \in C^\infty(\Sigma, E)$ alors on a la formule de Green

$$\int_\Sigma (nT\sigma, \tau) = \int_\Omega (D\mathcal{E}(\sigma), D\tau) \ ;$$

On en déduit la proposition par continuité des deux expressions par rapport à la topologie de W. ■

Décomposition de Hodge. — Le calcul du symbole principal montre que T définit un complexe elliptique et donc on a les décompositions de Hodge suivantes :

2.6. Proposition. —

$$C^\infty(\Sigma, E) = (\ker T \cap \ker T^*) \oplus T(C^\infty(\Sigma, E)) \oplus T^*(C^\infty(\Sigma, E)),$$

et

$$\{\sigma \in C^\infty(\Sigma, E),\, T\sigma = 0\} = (\ker T \cap \ker T^*) \oplus T(C^\infty(\Sigma, E)).$$

De plus on a les décompositions des espaces de Sobolev

$$H^s(\Sigma, E) = (\ker T \cap \ker T^*) \oplus T(H^{s+1}(\Sigma, E)) \oplus T^*(H^{s+1}(\Sigma, E)).$$

2.7. Corollaire. — $\ker T / \mathrm{Im}\, T$ *est de dimension finie.*

Remarquons que les solutions au sens des distributions à l'équation $T\sigma = T^*\sigma = 0$ sont les solutions à l'équation $(T + T^*)\sigma = 0$ et ces solutions sont donc lisses puisque $T + T^*$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique.

En fait, on a mieux : il existe des opérateurs de Green continus G, H : $H^s(\Sigma, E) \longrightarrow H^{s+1}(\Sigma, E)$ tels que l'image de G soit incluse dans celle de T^* et l'image de H soit incluse dans celle de T, et que tout élément $\sigma \in H^s(\Sigma, E)$ s'écrive $\sigma = h(\sigma) + T(H(\sigma)) + T^*(G(\sigma))$ où $h(\sigma)$ est la projection L^2 de σ sur le noyau de $T + T^*$.

De plus, puisque $-nTn = T^*$, on a les égalités

$$C^\infty(\Sigma, E) = (\ker T \cap n \ker T) \oplus T(C^\infty(\Sigma, E)) \oplus nT(C^\infty(\Sigma, E)),$$

$$\text{et } \{\sigma \in C^\infty(\Sigma, E),\, T\sigma = 0\} = (\ker T \cap n \ker T) \oplus T(C^\infty(\Sigma, E)).$$

On a aussi bien sûr les identités correspondantes pour les espaces de Sobolev.

3. Interprétation de cet espace de cohomologie.

Une solution à l'équation $D\sigma = 0$ sur Ω qui est dans H^k est dans W^k, et en fait l'espace de cohomologie associé à T s'identifie naturellement, via l'application trace, au quotient de l'espace des solutions de cette équation qui sont dans W^k par l'espace de celles qui sont dans H^k.

3.1. THÉORÈME. — *L'application trace réalise des isomorphismes entre*

$$\{\sigma \in W^k,\ D\sigma = 0\} \text{ et } \{\sigma \in H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E),\, T\sigma = 0\} \text{ pour } k \geq 1\ ;$$

$$\{\sigma \in H^k,\ D\sigma = 0\} \text{ et } T\left(H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E)\right) \text{ pour } k \geq 0\ .$$

Preuve. — Prouvons la première égalité. On a d'abord

$$R\{\sigma \in W^k,\ D\sigma = 0\} \subset \{\sigma \in H^{k+\frac{1}{2}}(\Sigma, E),\, T\sigma = 0\}$$

car par définition de l'application trace et de T on a $R \circ D = T \circ R$. Puis montrons que si $\sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$ vérifie $T\sigma = 0$ alors $D\mathcal{E}(\sigma) = 0$: mais $\tau = D\mathcal{E}(\sigma)$ est de carré sommable et τ vérifie $D\tau = 0$ et $R\tau = 0$ ainsi τ est nulle d'après le théorème de Calderón, (cf 2.3). On a montré la première égalité pour $k = 1$, les autres cas s'en suivent immédiatement.

Montrons maintenant la seconde égalité, et commençons par montrer que

$$R\{\sigma \in L^2(\Omega, E),\, D\sigma = 0\} = T\left(H^{1/2}(\Sigma, E)\right).$$

On remarque d'abord que l'on a l'inclusion

$$T\left(H^{1/2}(\Sigma, E)\right) \subset R\{\sigma \in L^2(\Omega, E),\, D\sigma = 0\},$$

puisqu'on a $D\{\sigma \in W,\, \Delta\sigma = 0\} \subset \{\sigma \in L^2,\, D\sigma = 0\}$. On va montrer que ces deux derniers espaces sont égaux, et on en déduira l'égalité voulue en prenant la restriction sur Σ de ces ensembles. Pour cela, on montre que l'application $D : \{\sigma \in W,\, \Delta\sigma = 0\} \longrightarrow \{\sigma \in L^2,\, D\sigma = 0\}$ est surjective. On va d'abord montrer que son image est fermée et ensuite qu'elle est dense.

Montrons donc que l'image de cette application est fermée : soit $(\sigma_k)_k$ une suite de $\{\sigma \in W,\, \Delta\sigma = 0\}$ tel que $D\sigma_k$ converge dans L^2 vers τ ; on a donc $\tau \in L^2$ et τ vérifie $D\tau = 0$, on veut donc trouver $\sigma_\infty \in W$ telle que $D\sigma_\infty = \tau$. Grâce au théorème de Calderón, $TR(\sigma_k)$ converge vers $R(\tau)$ dans $H^{-1/2}(\Sigma)$. Or l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\Sigma, E)$ a la décomposition suivante

$$H^{1/2}(\Sigma, E) = \{\sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E),\, T\sigma = 0\} \oplus T^*(H^{\frac{3}{2}}(\Sigma, E)),$$

et il existe un opérateur de Green continu $G : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Sigma, E)$ tel que l'image de G soit contenue dans l'image de T et que si $\sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, E)$ on ait la décomposition $\sigma = h + T^*G\sigma$ où $Th = 0$. Ainsi pour tout k, on a $R\sigma_k = h_k + T^*GR\sigma_k$ et donc

$$\lim_{k\to\infty} (TT^* + T^*T)GR\sigma_k = \tau, \text{ dans } H^{-1/2}(\Sigma).$$

Ainsi par régularité elliptique, la suite $(GR\sigma_k)_k$ converge dans $H^{3/2}(\Sigma)$ donc la suite $(T^*(GR\sigma_k))_k$ converge dans $H^{1/2}$ et donc la suite $(\mathcal{E}\left(T^*(GR\sigma_k)\right))_k$ converge dans W vers un élément σ_∞ de W ; on a donc $\Delta\sigma_\infty = 0$ et $R(\sigma_\infty) = \lim_{k\to\infty} T^*GR\sigma_k$, ainsi $TR\sigma_\infty = R\tau$ et donc $D\sigma_\infty = \tau$. Ce qui montre que l'image est fermée.

Montrons maintenant que l'image est dense : soit $\sigma \in L^2(\Omega, E)$ qui vérifie $D\sigma = 0$ et qui est orthogonal à $D\{\sigma \in W, \, \Delta\sigma = 0\}$; ainsi on a

$$\int_\Omega (D\phi, \sigma) = 0, \text{ pour tout } \phi \in W, \text{ tel que } \Delta\phi = 0.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \; \mathrm{dist}(x, \Sigma) > \varepsilon\}$, alors pour ε assez petit, Ω_ε est un ouvert à bord lisse sur lequel σ est lisse et de carré sommable. Par continuité des expressions par rapport à la topologie de W, on a donc

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (D\phi, \sigma) - (\phi, D\sigma) = \int_{\Omega_\varepsilon} (D\phi, \sigma) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (n\phi, \sigma)$$

Cette expression tend donc vers zéro lorsque ε tend vers zéro. Mais la forme sesquilinéaire $(\psi, \tau) \in H^{1/2} \times H^{-1/2} \mapsto \int_\Sigma (n\psi, \tau)$ est continue, ainsi cette limite est $\int_\Sigma (nR\phi, R\sigma)$. On a donc $\int_\Sigma (n\phi, R(\sigma)) = 0$ ceci pour tout élément $\phi \in H^{1/2}(\Sigma, E)$, ce qui montre que $R\sigma$ est nulle, puisque cette forme sesquilinéaire est non-dégénérée. Donc $\sigma = 0$ par la remarque (2.3).

On a donc montré l'égalité $R\{\sigma \in L^2(\Omega, E), \, D\sigma = 0\} = T\left(H^{1/2}(\Sigma, E)\right)$; les autre cas s'en déduisent de la façon suivante : tout d'abord pour la même raison, on a l'inclusion

$$T\left(H^{k+1/2}(\Sigma, E)\right) \subset R\{\sigma \in H^k(\Omega, E), \, D\sigma = 0\},$$

et si σ est un élément de H^k qui vérifie $D\sigma = 0$ alors par ce qui précéde on trouve $\tau \in W$ qui vérifie $D\tau = \sigma$. Ainsi en restriction à Σ on a $TR\tau = R\sigma$ où $R\tau \in H^{1/2}(\Sigma)$ et $R\sigma \in H^{k-1/2}(\Sigma)$, et on conclut grâce à la décomposition (2.6) qui permet de trouver $\tau' \in H^{k+1/2}(\Sigma)$ qui vérifie $T\tau' = R\sigma$. ■

3.2. Remarque. — Remarquons que si $\overline{\Omega}$ est compact ou que si on a l'inégalité de Poincaré

$$\forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega, E) \; , \; \Lambda \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|D\sigma\|^2_{L^2(\Omega)},$$

alors l'espace W est simplement égal à l'espace $H^1(\Omega, E)$ et donc on a $\ker T = \mathrm{Im}\, T$.

4. L'indice des opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini .

Le but de ce paragraphe est d'établir plusieurs formules pour l'indice (étendu) des opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini ; on suppose dans cette partie que $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ est un opérateur de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué, qui est non-parabolique à l'infini , c'est à dire qu'il existe un compact K de M tel que pour tout ouvert U borné dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$\forall \sigma \in C_0^\infty(M - K, E) \; , \; C(U) \, \|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)}. \tag{4.1}$$

Dans [C1], on a montré que si $\tilde{K}$ est un compact contenant K dans son intérieur et si on définit l'espace de Sobolev $W(M, E)$ comme le complété de l'espace $C_0^\infty(M, E)$ muni de la norme

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(\tilde{K})} + \|D\sigma\|^2_{L^2(M)}} \; ,$$

alors cet espace ne dépend pas du compact $\tilde{K}$ choisi et il s'injecte continûment dans H^1_{loc} ; et de plus les opérateurs $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ et $D^+ : W(E^+) \longrightarrow L^2(E^-)$ sont Fredholm. On a vu que les solutions L^2 de l'équation $D\sigma = 0$ sont dans l'espace W, et donc l'indice de D est $h_\infty(D) = \dim(\ker_W D / \ker_{L^2} D)$: c'est la codimension de l'espace des solutions L^2 à l'équation $D\sigma = 0$ dans l'espace des solutions qui sont dans W. Nous avions aussi étudié les opérateurs de type Dirac sur une variété riemannienne à bout cylindrique. Un tel opérateur est non-parabolique à l'infini et les solutions à l'équation $D\sigma = 0$ qui sont dans l'espace W sont exactement celles que M. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer appellent solutions étendues dans [A-P-S]. C'est pourquoi on appelle indice étendu l'indice de $D^+ : W(E^+) \longrightarrow L^2(E^-)$; ainsi si on note $h_\infty(D^+) = \dim(\ker_W D^+ / \ker_{L^2} D^+)$ alors on relie l'indice L^2 et l'indice étendu par la formule

$$\operatorname{ind}_e D^+ = h_\infty(D^+) + \operatorname{ind}_{L^2} D^+.$$

Ici, nous commençons par montrer que les indices étendus s'expriment comme des indices de paire de Fredholm ; comme le montre dans le cas compact le théorème de Bojarski [B-W].

4.a. Un théorème de Bojarski. — Soit donc K un compact à bord lisse de M hors duquel nous avons les estimées suivantes : pour tout ouvert U borné dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$\forall \sigma \in C_0^\infty(M - K, E) \ , \ C(U) \, \|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)}.$$

De plus on notera Σ le bord de K et Ω le complémentaire de K. L'analyse faite précédement nous fournit deux opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 : $T_K, T_\Omega : C^\infty(\Sigma, E) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, E)$ induits respectivement par les restrictions de D à K et à Ω. Ces opérateurs se décomposent suivant la graduation de E en $T_K^+ + T_K^-$ et en $T_\Omega^+ + T_\Omega^-$. Nous pouvons exprimer les noyaux étendus et L^2 de D à l'aide de ces opérateurs :

4.2.Proposition. — *L'application trace réalise des isomorphismes entre*

$$\{\sigma \in W, \ D\sigma = 0\} \text{ et } \{\sigma \in C^\infty(\Sigma, E), \, T_K\sigma = T_\Omega\sigma = 0\};$$

$$\{\sigma \in L^2, \ D\sigma = 0\} \text{ et } T_\Omega\left(H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E)\right) \cap T_K\left(H^{k-\frac{1}{2}}(\Sigma, E)\right), \ k \in \mathbf{N}.$$

Preuve. — Ceci résulte du théorème 3.1 et du fait qu'une section de E qui est localement dans H^1 vérifie l'équation $D\sigma = 0$ si et seulement si elle la vérifie sur K et sur Ω. Pour la seconde identité il faut remarquer que les solutions L^2 à cette équation sont en fait lisses. ■

Remarquons que le symbole principal de l'opérateur $T_K + T_\Omega$ est la multiplication de Clifford par $i\xi$; ainsi c'est un opérateur pseudodifférentiel elliptique et son noyau est formé de section lisses de E. Ceci montre que les espaces $\{\sigma \in H^s(\Sigma, E), T_K\sigma = T_\Omega\sigma = 0\}$ sont en fait indépendants du réel s et donc égaux à $\{\sigma \in C^\infty(\Sigma, E), T_K\sigma = T_\Omega\sigma = 0\}$. Et puisque

$$T_\Omega\left(H^{s+1}(\Sigma, E)\right) \cap T_K\left(H^{s+1}(\Sigma, E)\right) \subset \{\sigma \in H^s(\Sigma, E), T_K\sigma = T_\Omega\sigma = 0\},$$

cette intersection ne dépend pas non plus de s. C'est pourquoi on notera ces espaces $\operatorname{Ker} T_K \cap \operatorname{Ker} T_\Omega$ et $\operatorname{Im} T_K \cap \operatorname{Im} T_\Omega$. On a donc les formules suivantes pour les indices étendus de D et D^+.

$$\operatorname{ind}_e D = \dim\big(\ker T_K \cap \operatorname{Ker} T_\Omega\big) - \dim\big(\operatorname{Im} T_K \cap \operatorname{Im} T_\Omega\big)$$

$$\text{et } \operatorname{ind}_e D^+ = \dim\big(\ker T_K^+ \cap \operatorname{Ker} T_\Omega^+\big) - \dim\big(\operatorname{Im} T_K^+ \cap \operatorname{Im} T_\Omega^+\big).$$

Or nous savons que la multiplication de Clifford par la normale $n : E \longrightarrow E$ est un isomorphisme donc

$$\dim\big(\operatorname{Im} T_K^+ \cap \operatorname{Im} T_\Omega^+\big) = \dim\big(\operatorname{Im} nT_K \cap \operatorname{Im} nT_\Omega\big).$$

Mais les opérateurs nT_K et nT_Ω sont auto-adjoints donc

$$\operatorname{Im} nT_K = \operatorname{Im}(nT_K)^* = (\ker(nT_K))^\perp = (\ker T_K)^\perp .$$

On a les mêmes identités pour les opérateurs T_Ω et T_K^+ et T_Ω^+, d'où la proposition

4.3. Corollaire. — *On a les expressions suivantes pour les indices des opérateurs D et D^+ :*

$$\operatorname{ind}_e D = \dim\big(\ker T_K \cap \operatorname{Ker} T_\Omega\big) - \dim\big((\ker T_K)^\perp \cap (\operatorname{Ker} T_\Omega)^\perp\big)$$

$$\text{et } \operatorname{ind}_e D = \dim\big(\ker T_K^+ \cap \operatorname{Ker} T_\Omega^+\big) - \dim\big(\big(\ker T_K^+\big)^\perp \cap \big(\operatorname{Ker} T_\Omega^+\big)^\perp\big).$$

Ceci peut s'exprimer en termes de paire de Fredholm. Rappellons qu'un couple (H_1, H_2) de sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert est une paire de Fredholm si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

i) $\dim H_1 \cap H_2 < \infty$,

ii) $H_1 + H_2$ est fermé et $\dim H_1^\perp \cap H_2^\perp < \infty$.

Dans ce cas on note $\operatorname{ind}(H_1, H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) - \dim\big(H_1^\perp \cap H_2^\perp\big)$ l'indice de cette paire de Fredhlom.

4.4. Lemme. — *Pour tout réel s, $(\ker_{H^s} T_K, \ker_{H^s} T_\Omega)$ et $(\ker_{H^s} T_K^+, \ker_{H^s} T_\Omega^+)$ forment des paires de Fredholm.*

Preuve. — On montre uniquement le résultat pour la première paire. On a vérifié plus haut la finitude des dimensions, il suffit donc de montrer que $\ker_{H^s} T_K + \ker_{H^s} T_\Omega$ est fermé dans H^s. Rappellons que si n est la normale intérieure à Ω le long de Σ, alors les symboles principaux de T_K et T_Ω sont

$$\sigma(T_K)(x,\xi) = n.|\xi| + i\xi,\ \xi \in T_x^*\Sigma$$
$$\sigma(T_\Omega)(x,\xi) = -n.|\xi| + i\xi,\ \xi \in T_x^*\Sigma.$$

Soit donc $(\sigma_k)_k$ et $(\tau_k)_k$ deux suites de $H^s(\Sigma, E)$ telle que $T_K\sigma_k = 0 = T_\Omega\tau_k$ et supposons que la suite $(\sigma_k + \tau_k)_k$ converge dans H^s vers un élément φ. Il s'agit de montrer que φ peut s'écrire $\varphi = \sigma_\infty + \tau_\infty$ où σ_∞ et τ_∞ sont des éléments de H^s qui vérifient $T_K\sigma_\infty = 0 = T_\Omega\tau_\infty$.

Soit A l'opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre deux défini par $A = T_\Omega^* T_\Omega + T_K^* T_K$, son symbole principal est

$$\sigma(A)(x,\xi) = 4\,|\xi|^2,\ \xi \in T_x^*\Sigma.$$

Le noyau de A est $\ker T_\Omega \cap \ker T_K$ car si $\psi \in C^\infty(\Sigma, E)$ alors on a la formule

$$\int_\Sigma (A\psi, \psi) = \int_\Sigma |T_K \psi|^2 + |T_\Omega \psi|^2.$$

Or dans H^{s-2} on a $\lim_k A\sigma_k = T_\Omega^* T_\Omega \varphi$ et $\lim_k A\tau_k = T_K^* T_K \varphi$. Ainsi il existe des suites $(h_k)_k$, $(h'_k)_k$ formées d'éléments de $\ker T_\Omega \cap \ker T_K$ telles que dans H^s, les suites $(\sigma_k + h_k)_k$ et $(\tau_k + h'_k)_k$ convergent vers σ_∞ et vers τ_∞ respectivement. Alors forcément la suite $(h_k + h'_k)_k$ converge dans H^s vers un élément $\tilde{\varphi}$ de $\ker T_\Omega \cap \ker T_K$. Et on a donc $\sigma_\infty + \tau_\infty - \tilde{\varphi} = \varphi$. ■

Ainsi nous avons les théorèmes de Bojarski

4.5. THÉORÈME. —

$$\operatorname{ind}_e D = \operatorname{ind}(\ker_{H^s} T_K, \ker_{H^s} T_\Omega)$$

et

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \operatorname{ind}(\ker_{H^s} T_K^+, \ker_{H^s} T_\Omega^+).$$

4.6. Remarque. — Remarquons que le projecteur orthogonal P^+ sur $\ker T_\Omega^+$ est un opérateur pseudo-différentiel et que c'est un projecteur de Calderòn puisque son symbole principal est

$$\sigma(P^+)(x,\xi)u = \frac{1}{2}\left(1 - ni\frac{\xi}{|\xi|}\right).u,\ \xi \in T_x^*\Sigma,\ u \in E_x^+.$$

4.b. Théorème de l'indice relatif. — Ces formules nous permettent de démontrer très rapidement le théorème de l'indice relatif :

4.7. THÉORÈME. — *Soient deux opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini*

$$D_1 \,:\, C^\infty(M_1, E_1) \longrightarrow C^\infty(M_1, E_1),\ D_2 \,:\, C^\infty(M_2, E_2) \longrightarrow C^\infty(M_2, E_2)$$

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *gradués et isométriques à l'infini, c'est à dire qu'il existe deux compacts* $K_1 \subset M_1$ *et* $K_2 \subset M_2$ *et une isométrie* $\iota \,:\, (M_1 - K_1, g_1) \longrightarrow (M_2 - K_2, g_2)$ *qui se relève en une isométrie graduée entre les fibrés, telle que*

$$D_1 \circ \iota^* = \iota^* \circ D_2,\ \text{au dessus de } M_2 - K_2.$$

alors on a

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+},$$

où on a noté $\alpha_{D_i^+}$ *est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principal de* D_i^+.

Preuve. — Elle repose sur les propriétés suivantes de l'indice des paires de Fredholm ([B-W], [A-S-S]) : Si (H_1, H_2) est une paire de Fredholm d'un espace de Hilbert H alors

i) $\operatorname{ind}(H_1, H_2) = -\operatorname{ind}(H_1^\perp, H_2^\perp)$,

ii) Si P_i est la projection orthogonale sur H_i, $i = 1, 2$ alors l'opérateur $(1 - P_2)P_1 : H_1 \longrightarrow H_2^\perp$ est Fredholm et son indice est l'indice de la paire (H_1, H_2)

iii) Si de plus H_3 est sous-espace vectoriel fermé de H et si P_3 est le projecteur orthogonal sur H_3, lorsque les opérateurs $\mathrm{Id} - P_1 - P_2$ et $P_2 - P_3$ sont compacts alors

$$\operatorname{ind}(H_1, H_2) = \operatorname{ind}(H_1, H_3) + \operatorname{ind}(H_3^\perp, H_2).$$

Dans la situation du théorème, on peut supposer que les compacts K_1 et K_2 sont à bord lisse et on identifie leurs bords que l'on note Σ. De la même façon, on identifie les variétés $M_i - K_i$, $i = 1, 2$, que l'on note Ω. Alors l'analyse faite dans les paragraphes précédents nous fournit des opérateurs $T_{K_1}^+, T_{K_2}^+$, et T_Ω^+ et l'on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ &= \operatorname{ind}(\ker T_{K_1}^+, \ker T_\Omega^+) - \operatorname{ind}(\ker T_{K_2}^+, \ker T_\Omega^+) \\
&= \operatorname{ind}(\ker T_{K_1}^+, \ker T_\Omega^+) + \operatorname{ind}\left(\left(\ker T_{K_2}^+\right)^\perp, \left(\ker T_\Omega^+\right)^\perp\right) \\
&= \operatorname{ind}\left(\ker T_{K_1}^+, \left(\ker T_{K_2}^+\right)^\perp\right).
\end{aligned}$$

Mais K_2 est compact ainsi il y a égalité entre le noyau et l'image de T_{K_2}, et si n est le champ normal à Σ intérieur à Ω, on a

$$\begin{aligned}
\left(\ker T_{K_2}^+\right)^\perp &= \left(\ker n T_{K_2}^+\right)^\perp \\
&= n \operatorname{Im} T_{K_2}^+ \\
&= n \ker T_{K_2}^-.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \operatorname{ind}(\ker T_{K_1}^+, n \ker T_{K_2}^-).$$

Notons que nous avons pu employer la propriété iii) ci-dessus des paires de Fredholm car d'après la remarque (4.6), ces projecteurs sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro qui ont même symbole principal donc ils différent d'un opŕateur compact.

On a donc montré que cet indice relatif ne dépend pas de la géométrie à l'infini. Soient donc

$$\tilde{D}_i^+ : C^\infty(\tilde{M}_i, E_i^+) \longrightarrow C^\infty(\tilde{M}_i, E_i^-),\ i \in \{1, 2\}$$

des opérateurs de type Dirac sur des variétés compactes, telles que pour des compacts $\tilde{K}_i \subset \tilde{M}_i$, l'opérateur $\tilde{D}_i$ sur $\tilde{K}_i$ et l'opérateur D_i sur K_i soient isométriques, alors on a l'égalité

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \operatorname{ind} \tilde{D}_1^+ - \operatorname{ind} \tilde{D}_2^+.$$

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer permet alors de conclure. ∎

4.c. Théorèmes de l'indice. — Soit $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ un opérateur de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué non-parabolique à l'infini , et soit Ω un voisinage de l'infini de M sur lequel on a les estimées (4.1). On note $h_\infty(\Omega)$ la dimension de l'espace de cohomologie associé à l'opérateur T_Ω induit par $D : C^\infty(\Omega, E) \longrightarrow C^\infty(\Omega, E)$, et on définit de même $h_\infty^\pm(\Omega)$. On a donc $h_\infty(\Omega) = \dim\left(\ker T_\Omega \cap n \ker T_\Omega\right)$.

4.8. Théorème. — *L'indice étendu de D est donné par la formule suivante*

$$\operatorname{ind}_e D = \frac{1}{2} h_\infty(\Omega) = h_\infty^+(\Omega) = h_\infty^-(\Omega).$$

Preuve. — C'est un corollaire des travaux précédents, en effet si on note K le complémentaire de Ω alors

$$\begin{aligned}
2h_\infty(\Omega) &= \operatorname{ind}\left(\ker T_K, \ker T_\Omega\right) + \operatorname{ind}\left(n \ker T_K, n \ker T_\Omega\right) \\
&= \operatorname{ind}\left(\ker T_K, \ker T_\Omega\right) + \operatorname{ind}\left(\left(\ker T_K\right)^\perp, n \ker T_\Omega\right) \\
&= \operatorname{ind}\left(\ker T_\Omega, n \ker T_\Omega\right) \\
&= \dim\left(\ker T_\Omega \cap n \ker T_\Omega\right).
\end{aligned}$$

Ceci car, comme K est compact, on a $n \ker T_K = \left(\operatorname{Im} nT_K\right) = \left(\ker nT_K\right)^\perp$.

Pour les autres égalités, on peut les montrer de trois façons différentes, la première consiste à reprendre la preuve précédente ; la deuxième est de remarquer que la multiplication de Clifford par n conserve l'espace $\left(\ker T_\Omega \cap n \ker T_\Omega\right)$ et qu'elle échange les parités ainsi $h_\infty^+(\Omega) = h_\infty^-(\Omega)$; enfin la troisième consiste à remarquer que $h_\infty^+(\Omega) - h_\infty^-(\Omega)$ est l'indice de l'opérateur pseudodifférentiel $T_\Omega^+ + \left(T_\Omega^-\right)^*$; or le symbole de cet opérateur est la multiplication de Clifford par $i\xi$; ainsi l'indice de cet opérateur est celui de l'opérateur de Dirac induit par $D^+ : C^\infty(K, E^+) \longrightarrow C^\infty(K, E^-)$, et cet indice est nul d'après l'invariance de l'indice par cobordisme (cf. [P]). ∎

Si de plus, on suppose qu'il existe un isomorphisme de fibrés $\tau : E^+ \longrightarrow E^-$ tel que $\tau D^- = \pm D^+ \tau^{-1}$. C'est par exemple le cas de l'opérateur de Gauss-Bonnet sur une variété de dimension impaire orientée. Dans ce cas, l'opérateur τ réalise un isomorphisme entre $\ker_{L^2} D^+$ et $\ker_{L^2} D^-$ et entre $\ker_W D^+$ et $\ker_W D^-$; ainsi l'indice L^2 de l'opérateur D^+ est nul et l'indice étendu de D^+ est $h_\infty(D^+)$. On a les égalités $h_\infty(D^+) = h_\infty(D^-) = h_\infty(D)/2$. Et donc, on a

4.9. Corollaire. — *Si $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini qui vérifie les conditions ci-dessus alors*

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \frac{1}{2} h_\infty^+(\Omega).$$

Ainsi dans les deux cas précédents, on a montré que l'indice étendu d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini pouvait s'exprimer en fonction d'un "nombre de Betti" d'un complexe elliptique sur une hypersurface "proche " de l'infini.

Toute notre théorie nous permet de donner une formule génerale pour l'indice étendu

4.10. THÉORÈME. — *Soit $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini sur une variété M; on suppose que K est un compact hors duquel on a les estimées (4.1) et qu'un voisinage de ∂K est isométrique au produit riemannien $]-\varepsilon, \varepsilon[\times\partial K$, et qu'au dessus de ce voisinage le fibré E et l'opérateur D respecte cette géométrie. En particulier sur ce voisinage $D \simeq n.(\frac{\partial}{\partial r} + A)$, où $A : C^\infty(\partial K, E) \longrightarrow C^\infty(\partial K, E)$ est un opérateur de type Dirac. Alors*

$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \int_K \alpha_{D^+} + \frac{\eta_{A^+}(0) - \dim\ker A^+}{2} + \mathrm{ind}(\mathcal{H}_{\leq 0}, \ker T^+_{M-K}),$$

où

a) α_D est la forme caractéristique définie par le symbole principal de D^+.

b) $\eta_{A^+}(0)$ est la valeur en 0 de l'extension méromorphe de

$$\eta_{A^+}(s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A^+} \mathrm{sign}\, \lambda |\lambda|^{-s},$$

(en fait, cette extension est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > -1/2$),

c) $\mathcal{H}_{\leq 0}$ est le sous-espace vectoriel de $L^2(\partial K, E^+)$ engendré par les espaces propres de A^+ associés aux valeurs propres négatives ou nulles de A^+.

Preuve. — On peut la faire de deux façons : la première est d'appliquer le théorème de l'indice relatif ou de façon équivalente d'écrire que

$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \mathrm{ind}(\ker T^+_K, \mathcal{H}^\perp_{\leq 0}) + \mathrm{ind}(\mathcal{H}_{\leq 0}, \ker T^+_{M-K}).$$

Or on sait que $\mathrm{ind}(\ker T^+_K, \mathcal{H}^\perp_{\leq 0})$ est l'indice de l'opérateur

$$D^+ : H^1(K, E^+, \mathcal{H}^\perp_{\leq 0}) \longrightarrow L^2(K, E^-),$$

où on a noté $H^1(K, E^+, \mathcal{H}^\perp_{\leq 0})$ l'espace des sections H^1 de $E|_K$ dont la trace sur ∂K est dans $\mathcal{H}^\perp_{\leq 0}$. Et suivant [A-P-S], cet indice vaut

$$\int_K \alpha_D - \frac{\dim \mathrm{Ker}\, A^+ - \eta_{A^+}(0)}{2}.$$

La seconde méthode consiste à se servir des travaux de [B-W] en remarquant que dans notre cas l'indice étendu est simplement l'indice de l'opérateur

$$D^+ : H^1(K, E^+, \ker T^+_{M-K}) \longrightarrow L^2(K, E^-),$$

et notre formule est exactement celle que donne Booss et Wojciechowski pour l'indice de cet opérateur. L'avantage de la première preuve est qu'elle n'utilise que les méthodes développées dans cet article. ■

5. Quelques calculs d'indices.

Ce dernier résultat montre que si un voisinage de l'infini a une géométrie qui permet de résoudre explicitement le problème de Dirichlet, alors on peut calculer l'indice étendu. Dans ce paragraphe, nous allons considérer le cas où un voisinage de l'infini est un produit tordu :

5.a. Cas de l'opérateur de Dirac. — Soit (M, g) une variété riemannienne spin dont un voisinage de l'infini est un produit tordu sur $\mathbf{R}_+$, i.e. il existe un compact à bord lisse K de M telle que $(M-K, g)$ soit isométrique à $\mathbf{R}_+ \times \partial K$ muni de la métrique riemannienne $dr^2 + f^2(r)h$ où r est la fonction radiale de $\mathbf{R}_+ \times \partial K$, où h est une métrique riemannienne sur ∂K et où f est une fonction lisse et strictement positive sur $\mathbf{R}_+$. On notera Σ le bord de K et S le fibré des spineurs sur M. nous avons la proposition

5.1. PROPOSITION . — *L'opérateur de Dirac est non-parabolique à l'infini dans les deux cas suivant :*

$$\text{premier cas} \ : \ \lim_{r\to\infty} f'(r) = 0,$$

$$\text{second cas} \ : \ \text{pour } r > 1, \ f(r) = ar, \ (a > 0).$$

Preuve. — Soit I l'application qui à $\sigma \in S_{(r,\theta)}$ associe $f^{\frac{n-1}{2}}(r)\sigma$. Alors selon [A2], [Ch], cette application réalise une isométrie entre les espaces de Hilbert $L^2(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, S)$ et $L^2\left(\mathbf{R}_+, L^2(\Sigma, S)\right)$, c'est à dire que si $\sigma \in L^2(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, S)$ alors

$$\|\sigma\|^2_{L^2(\mathbf{R}_+\times\Sigma,S)} = \int_0^\infty \|I(\sigma)(r,.)\|^2_{L^2(\Sigma,S)} dr.$$

Et de plus toujours suivant ([A2], [Ch]), si $\tau \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, S)$, alors $\partial\tau = I^{-1}DI\sigma = n\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{f(r)}\right)\tau$, où A est deux fois l'opérateur de Dirac de Σ, En effet le fibré des spineurs de M au-dessus de Σ se scinde en $\mathbf{S} \oplus n\mathbf{S}$ où $\mathbf{S}$ est le fibré des spineurs de Σ. L'opérateur A est elliptique autoadjoint ; soit donc

$$L^2(\Sigma, E) = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}A} \mathbf{C}\varphi_\lambda,$$

une décomposition spectrale de A, où

$$D\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda,$$
$$\int_\Sigma |\varphi_\lambda|^2 = 1.$$

Alors toute section $\tau \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \Sigma, S)$ se décompose en :

$$\tau(r,\theta) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}A} \tau_\lambda(r)\varphi_\lambda(\theta),$$

où $\tau_\lambda \in C_0^\infty(]0,\infty[)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\|\partial\tau\|_{L^2}^2 &= \int_0^\infty \left(\sum_\lambda \left|\tau_\lambda' + \frac{\lambda}{f}\tau_\lambda\right|^2\right) dr \\ &= \sum_\lambda \int_0^\infty \left(|\tau_\lambda'|^2 + \frac{\lambda^2+\lambda f'}{f^2}|\tau_\lambda|^2\right) dr.\end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le premier cas. Soit donc $\mu = \operatorname{dist}(\mathrm{Sp}A - \{0\}, 0)$, si on a $|f'(r)| < \mu/2$ alors $\lambda^2 + \lambda f' \geq \lambda^2/2$, ceci pour toute valeur propre λ de A. Soit donc R telle que $|f'(r)| < \mu/2$ pour tout $r > R$. Pour $\tau \in C_0^\infty(]R,\infty[\times\Sigma, S)$ on a

$$\begin{aligned}\|\partial\tau\|_{L^2}^2 &\geq \sum_\lambda \int_R^\infty \left(|\tau_\lambda'|^2 + \frac{\lambda^2}{2f^2}|\tau_\lambda|^2\right) dr \\ &\geq \frac{1}{4}\int_R^\infty \frac{\|\tau\|^2_{L^2(\Sigma,S)}}{r^2}dr + \frac{1}{2}\left\|\frac{A\tau}{f}\right\|^2_{L^2}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ceci d'après l'inégalité de Hardy qui affirme que si ψ est une fonction lisse à support compact dans $]0,\infty[$, alors $\int_0^\infty |\psi'|^2 dr \geq \int_0^\infty (|\psi|^2/4r^2)dr$, cf [Da]. Ceci montre donc que dans le premier cas l'opérateur de Dirac est non-parabolique à l'infini . Remarquons que l'on a le même résultat si on suppose simplement que $\limsup_\infty |f'| < \mu$.

Plaçons nous maintenant dans le second cas, si $\tau \in C_0^\infty(]1,\infty[\times\Sigma, S)$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial\tau\|_{L^2}^2 &= \sum_\lambda \int_1^\infty \left(|\tau_\lambda'|^2 + \frac{\lambda^2+\lambda a}{(ar)^2}|\tau_\lambda|^2\right) dr \\ &= \sum_\lambda \int_1^\infty \left(|\tau_\lambda'|^2 - \frac{1}{4r^2}|\tau_\lambda|^2 + \frac{(\frac{\lambda}{a}+\frac{1}{2})^2}{r^2}|\tau_\lambda|^2\right) dr.\end{aligned}$$

Mais si on pose $\tau_\lambda = \sigma_\lambda\sqrt{r}$ alors $\int_1^\infty \left(|\tau_\lambda'|^2 - \frac{1}{4r^2}|\tau_\lambda|^2\right) dr = \int_1^\infty |\sigma_\lambda'|^2\, r dr$; or on a l'inégalité de Hardy (qui s'obtient de la précédente par un changement de variables)

$$\int_1^\infty |\sigma_\lambda'|^2 r dr \geq \int_1^\infty (|\sigma_\lambda|^2/4r\ln^2 r)dr. \tag{5.3}$$

On obtient donc

$$\|\partial\tau\|_{L^2} \geq \sum_\lambda \int_1^\infty \left(\frac{(\frac{\lambda}{a}+\frac{1}{2})^2}{r^2}|\tau_\lambda|^2 + \frac{|\tau_\lambda|^2}{4r^2\ln^2 r}\right) dr.$$

■

Remarque. — La même preuve nous montre que si f est concave alors l'opérateur de Dirac est non-parabolique à l'infini ; mais dans le cas où $\lim f' = a \neq 0$ et où on suppose de plus que $f'' = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2\ln^2 r}\right)$ alors les opérateurs de Dirac, pour les "warping functions" f et ar, ont même indice.

Nous pouvons alors énoncer nos formules de l'indice dans ce cadre là

5.4. Théorème . — *Si D est l'opérateur de Dirac d'une variété riemannienne spin de dimension paire dont un voisinage de l'infini est isométrique à $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)h)$ où f est une fonction constante prés de 0 et si A^+ est l'opérateur de Dirac sur Σ on a :*

1) si $\lim_\infty f' = 0$, alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \int_K \hat{A} + \frac{\dim \operatorname{Ker} A^+ + \eta_{A^+}(0)}{2} \ .$$

2) Et si pour $r > 1$, $f(r) = ar$, alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \int_K \hat{A} + \frac{\dim \operatorname{Ker} A^+ + \eta_{A^+}(0)}{2} + \operatorname{card}\{\lambda \in \operatorname{Sp} A^+,\ -1/2 \le \lambda/a \le 0\}.$$

Preuve. — D'abord on remarque que dans ce cas A^+ est justement l'opérateur de Dirac de Σ. Il suffit d'appliquer le théorème (4.10), et pour cela il faut déterminier le noyau de $T^+_{\mathbf{R}^+ \times \Sigma}$. Pour cela, on commence par résoudre le problème de Dirichlet sur $\mathbf{R}^+ \times \Sigma$ qui est

$$\begin{cases} \Delta\sigma = 0 \\ \sigma = \tau, \quad \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

En décomposant par rapport à la décomposition spectrale de A^+, on a

$$\sigma = \sum_\lambda \tau_\lambda(r)\varphi_\lambda(\theta)$$
$$\tau = \sum_\lambda \tau_\lambda \varphi_\lambda(\theta),$$

avec

$$\left(-\frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{f}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{f}\right)\tau_\lambda = 0$$
$$\tau_\lambda(0) = \tau_\lambda,$$
$$\tau_\lambda\varphi_\lambda \in W.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$\alpha A_\lambda(r) + \beta B_\lambda(r)$$

où

$$A_\lambda(r) = e^{-\lambda \int_0^r f^{-1}(t)dt}$$
$$B_\lambda(r) = e^{-\lambda \int_0^r f^{-1}(t)dt} \int_0^r e^{2\lambda \int_0^t f^{-1}(s)ds} dt.$$

Plaçons nous dans le cas où $\lim_\infty f'(r) = 0$; alors on a $\lim f(r)/r = 0$ et donc si $\varepsilon > 0$ alors on a pour r assez grand $f(r) < \varepsilon r$. Ainsi si $\lambda \ge 0$ on a, pour $r \ge R$:

$$A_\lambda(r) \le C_{\varepsilon,R,\lambda}\ r^{\frac{-\lambda}{\varepsilon}},$$

ce qui montre que dans cas $A_\lambda(r)\varphi_\lambda(r) \in W$ et que si $\lambda > 0$ alors $A_\lambda(r)\varphi_\lambda(r) \in L^2$. Puis si $\lambda < 0$, on a $\exp(2\lambda \int_0^t f^{-1}(s)ds) \leq Ct^{2\lambda/\varepsilon}$ et donc

$$B_\lambda(r) = C_\lambda e^{-\lambda \int_0^r f^{-1}(t)dt} \int_r^\infty e^{2\lambda \int_0^t f^{-1}(s)ds} dt,$$

donc pour r assez grand

$$\begin{aligned} B_\lambda(r) &= C_\lambda \int_r^\infty e^{\lambda \int_0^r f^{-1}(t)dt}\; e^{\lambda \int_r^t f^{-1}(s)ds} dt \\ &\leq C \int_r^\infty t^{\lambda/\varepsilon}\, (t/r)^{\frac{\lambda}{\epsilon}} dt \\ &\leq C' r^{\frac{\lambda}{\epsilon}+1}. \end{aligned}$$

Ainsi en prenant ε assez petit, on a $B_\lambda \in L^2$. Ainsi la solution au probème de Dirichlet est

$\tau_\lambda(r) = \tau_\lambda A_\lambda(r), \text{ si } \lambda \geq 0$

$$\tau_\lambda(r) = \tau_\lambda \left(\int_0^\infty e^{2\lambda \int_0^t f^{-1}(s)ds} dt \right)^{-1} e^{-\lambda \int_0^r f^{-1}(t)dt} \int_r^\infty e^{2\lambda \int_0^t f^{-1}(s)ds} dt, \quad \text{si } \lambda < 0,$$

Ainsi le noyau de $T^+_{\mathbf{R}^+\times\Sigma}$ est le sous-espace engendré par les espaces propres de A^+ qui sont associés aux valeurs propres positives ou nulles de A^+.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $f(r) = ar$; dans ce cas les solutions à l'équation différentielle sont de la forme

$$\alpha r^{-\lambda/a} + \beta r^{(\lambda/a)+1}, \text{ si } \lambda \neq -a/2$$
$$(\alpha \ln r + \beta) r^{-1/2}, \text{ si } \lambda = -a/2.$$

L'analyse faite précédement montre que la solution du problème de Dirichlet est

$$\tau_\lambda(r) = \tau_\lambda r^{-\lambda/a}, \text{ si } \lambda/a \geq -1/2$$
$$\tau_\lambda(r) = \tau_\lambda r^{(\lambda/a)+1}, \text{ si } \lambda/a < -1/2.$$

Ainsi dans ce cas on a

$$\ker T^+_{\mathbf{R}_+\times\Sigma} = \bigoplus_{\lambda \geq -a/2} \mathbf{C}\varphi_\lambda.$$

Et donc si on note $\mathcal{H}_{\geq -a/2}$ (resp. $\mathcal{H}_{<-a/2}$) le sous-espace vectoriel de $L^2(\partial K, E^+)$ engendré par les espaces propres de A^+ associés aux valeurs propres supérieures ou égales (resp. strictement inférieures) à $-a/2$, alors

$$\operatorname{ind}(\mathcal{H}_{\leq 0}, \ker T^+_{\mathbf{R}_+\times\Sigma}) = \dim\left(\mathcal{H}_{\leq 0} \cap \mathcal{H}_{\geq -a/2}\right) - \dim\left(\mathcal{H}_{>0} \cap \mathcal{H}_{<-a/2}\right).$$

■

5.b. L'opérateur de Gauss-Bonnet. — Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n, dont un voisinage de l'infini est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)h)$. Toute forme différentielle $\alpha \in \Lambda T^*(\mathbf{R}_+ \times \Sigma)$ se décompose en

$$\alpha = dr \wedge \alpha_1 + \alpha_2$$

où $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \Lambda T^*\Sigma$. Ainsi, on réalise un isomorphisme entre $\Lambda^{2\bullet}T^*(\mathbf{R}_+ \times \Sigma)$ et $\Lambda T^*\Sigma$. Suivant [Br-S] et [B-M-S], on considère alors l'application I qui à $\alpha = dr \wedge \alpha_1 + \alpha_2 \in C_0^\infty(\Lambda^{2\bullet}T^*(\mathbf{R}_+ \times \Sigma))$ associe

$$I(\alpha) = f^{P-\frac{n-1}{2}}\alpha_1 - f^{P-\frac{n-1}{2}}\alpha_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+, C^\infty(\Lambda T^*\Sigma)),$$

où P est l'endomorphisme qui vaut $p\,\mathrm{Id}$ sur $C^\infty(\Lambda^p T^*\Sigma)$. Alors I est une bijection qui réalise une isométrie de $L^2(\Lambda^{2\bullet}T^*(\mathbf{R}_+ \times \Sigma))$ sur $L^2(\mathbf{R}_+, L^2(\Lambda T^*\Sigma))$ i.e.

$$\|\alpha\|^2_{L^2(\Lambda^{2\bullet}T^*(\mathbf{R}_+\times\Sigma))} = \int_0^\infty \|I(\alpha)(r,.)\|^2_{L^2(\Lambda T^*\Sigma)}dr.$$

De plus toujours suivant ([Br-S] et [B-M-S]), si $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+, C^\infty(\Lambda T^*\Sigma))$ alors

$$D\alpha = I(d+\delta)I^{-1}\alpha = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A + f'L}{f}\right)\alpha,$$

où A est l'opérateur de Gauss-Bonnet sur Σ, $\sigma\alpha = (-1)^P\alpha$ et L est l'endomorphisme de $\Lambda T^*\Sigma$ défini par $L = (-1)^P(P - \frac{n-1}{2})$. Cette réduction nous permet d'énoncer la

5.5. Proposition. — *Si* $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$ *ou si* $f(r) = ar$, *alors l'opérateur de Gauss-Bonnet sur* (M,g) *est non-parabolique à l'infini* .

Preuve. — Dans le second cas, on a $D = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{B}{ar}\right)$, où B est l'opérateur elliptique autoadjoint $A + aL$, c'est donc une conséquence de l'analyse faite précédement.

Plaçons nous dans le premier cas : on a la décomposition

$$C^\infty(\mathbf{R}_+, C^\infty(\Lambda T^*\Sigma)) = C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{H}) \oplus C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}_\infty),$$

où $\mathcal{H}$ est l'espace des formes différentielles harmoniques sur Σ et où on note $\mathcal{L}_s$ l'orthogonal de $\mathcal{H}$ dans $H^s(\Lambda T^*\Sigma)$. De plus L et A respectent cette décomposition, donc par rapport à celle ci, D se décompose en

$$\begin{pmatrix} \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{f'}{f}L\right) & 0 \\ 0 & \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{B}{f}\right) \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{H})$, on a la minoration

$$\|D\alpha\|_{L^2} = \left\| f^{-L}\frac{\partial}{\partial r}f^L\alpha\right\|_{L^2} \geq \frac{C_T}{T}\|\alpha\|_{L^2([0,T],\mathcal{H})}.$$

Ce qui montre que la première partie de l'opérateur D est non-parabolique à l'infini . Puis pour la seconde, l'inégalité (5.2) nous montre que pour R assez grand, si $\alpha \in C_0^\infty(]R,\infty[, \mathcal{L}_\infty)$ alors

$$\left\|\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{f}\right)\alpha\right\|^2_{L^2} \geq C^{te}\left\|\frac{\alpha}{f}\right\|^2_{L^2}. \tag{5.6}$$

Soit $E : C^\infty(\Lambda^{2\bullet}T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{2\bullet+1}T^*M)$ l'opérateur défini par

$$E\alpha = (d+\delta)\varphi\alpha + I^{-1}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{f}\right)(1-P)I(1-\varphi)\alpha + I^{-1}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{f'}{f}L\right)PI(1-\varphi)\alpha$$

où φ est une fonction lisse à support compact valant 1 sur K et où P est la projection orthogonale de $L^2(\Lambda T^*\Sigma)$ sur $\mathcal{H}$. Soit $W(\Lambda^{2\bullet}T^*M)$ le complété de $C_0^\infty(\Lambda^{2\bullet}T^*M)$ muni de la norme

$$\alpha \mapsto \sqrt{\|\alpha\|^2_{L^2(K)} + \|E\sigma\|^2_{L^2(M)}} .$$

L'analyse, faite dans [C1], montre que cet espace de Sobolev s'injecte continûment dans H^1_{loc}, et que de plus l'opérateur $E\ :\ W \longrightarrow L^2$ est Fredholm. Mais les opérateurs E et D diffèrent d'un opérateur compact de W dans L^2 : en effet $D - E$ est isométrique à l'opérateur $(f'/f)L(1-\varphi)$ agissant sur $W_0(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}_1)$ qui est le complété de l'espace $C_0^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}_1)$ muni de la norme

$$\alpha \mapsto \left\| \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{f}\right)\alpha\right\|_{L^2} .$$

Si g est une fonction bornée sur $\mathbf{R}_+$, alors $(g/f)L\ :\ W_0(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}_1) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}_0)$ est continue et d'après (5.6) on a

$$\|(g/f)L\|_{W_0 \to L^2} \leq C\|g\|_{L^\infty} ;$$

De plus si g est une fonction C^1 à support compact alors $(g/f)L\ :\ W_0 \longrightarrow L^2$ est compact, ce qui montre que si g est une fonction C^1 qui tend vers 0 à l'infini, alors $(g/f)L$ est compact de W_0 dans L^2. Ce qui montre que l'opérateur de Gauss-Bonnet est Fredholm de $W(\Lambda^{2\bullet}T^*M)$ dans $L^2(\Lambda^{2\bullet+1}T^*M)$, et d'après [C1], cela équivaut au fait d'être non-parabolique à l'infini . ■

Indice en dimension paire. — Nous allons maintenant calculer l'indice de l'opérateur de Gauss-Bonnet en dimension paire, i.e dim $M = n = 2k$. Puisque cet indice ne change pas si on change la fonction f sur un compact, on suppose que la fonction f est constante près de 0, alors en appliquant le théorème (4.10), nous avons

$$\mathrm{ind}_e(d+\delta) = \int_K \Omega^g + \frac{1}{2}\eta(0) - \frac{1}{2}h + i$$

où

i) $\eta(0)$ est l'invariant eta de l'opérateur de Gauss-Bonnet, il est bien connu qu'il est nul,

(ii) puis h est la dimension du noyau de l'opérateur de Gauss-Bonnet sur Σ i.e c'est la somme des nombres de Betti de Σ :

$$h = \sum_{l=0}^{2k-1} \mathrm{b}_l(\Sigma),$$

iii) enfin i est l'indice de l'opérateur de Gauss-Bonnet sur la variété $(\mathbf{R}\times\Sigma, dr^2 + \rho^2 g)$ où ρ est une fonction positive valant f sur $[1, \infty[$ et valant 1 sur $\mathbf{R}_-$.

Comme le bord de K est supposé totalement géodésique, d'après la formule de Chern, on a $\int_K \Omega^g = \chi(K) = \chi(M)$. Calculons donc i.

Plaçons nous dans le cas où $\rho = ar$ pour $r > 1$:

Nous effectuons une première réduction : l'opérateur de Gauss-Bonnet est isométrique à l'opérateur

$$D = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A + f'L}{f}\right)$$

agissant sur $C^\infty(\mathbf{R}, C^\infty(\Lambda T^*\Sigma))$. Soit alors $(\varphi_l(r,\theta))_l$ une base orthonormale de $L^2(\Lambda T^*\Sigma)$ qui diagonalise l'opérateur $B_r = A + f'(r)L$; on a donc $B_r\varphi_l(r,.) = \lambda_l(r)\varphi_l(r,.)$. De plus on peut le faire de telle sorte que, pour chaque l, la fonction $r \mapsto \varphi_l(r,.)$ soit continue. On considère alors l'opérateur linéaire F : $C^\infty(\mathbf{R}, C^\infty(\Lambda T^*\Sigma)) \longrightarrow C^\infty(\mathbf{R}, C^\infty(\Lambda T^*\Sigma))$ défini par

$$F\left(\sum_l x_l(r)\varphi_l(r,\theta)\right) = \sum_l \left(\dot{x}_l(r) + \frac{\lambda_l(r)}{f(r)}x_l(r)\right)\sigma\varphi_l(r,\theta).$$

Alors $F : W \longrightarrow L^2$ est continue et $D - F$ est un opérateur compact de W dans L^2, en effet $(D - L)\left(\sum x_l(r)\varphi_l(r,.)\right) = \sum x_l(r)\sigma\dot{\varphi}_l(r,.)$ et les calculs des $(\varphi_l)_l$ et des $(\lambda_l(r))_l$ fait dans [Br-S], montre que $\dot{\varphi}_l = 0$ si $r < 0$ ou si $r > 1$ et que $\|\dot{\varphi}_l\|_{H^1} = \mathrm{O}(\lambda_l^{-1})$, ce qui permet de montrer que l'opérateur $(D - F)$ est continu de W dans $H^1([0,1], H^1(\Lambda T^*\Sigma))$ et il est donc compact de W dans L^2. Il suffit donc calculer l'indice de F.

Maintenant l'étude faite au paragraphe précédent montre que

$$i = \#\{l, \text{tel que } \lambda_l(0) \leq 0, \lambda_l(1) \geq -1/2\} - \#\{l, \text{tel que } \lambda_l(0) > 0, \lambda_l(1) < -1/2\}$$

Selon [Br-S], les valeurs propres répétées avec multiplicités de $A + f'(r)L$ sont :

$$\text{les } \frac{(-1)^{p+1}}{2}f'(r) \pm \sqrt{\lambda_{p,j} + (p-k+1)^2 f'^2(r)}$$

où $\lambda_{p,j}$ sont les valeurs propres non nulles (répétées avec multiplicité) du Laplacien agissant sur les p formes différentielles cofermées sur Σ;

$$\text{et les } (-1)^p\left(p - k + \frac{1}{2}\right)f'(r)$$

de multiplicité égale à $\mathrm{b}_p(\Sigma)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} i =& \#\left\{\lambda_{p,j},\ \frac{(-1)^{p+1}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_{p,j}}{a} + (p-k+1)^2} \geq -1/2\right\} \\ &+ \sum_{(-1)^p(p-k+\frac{1}{2}) \geq -1/2} \mathrm{b}_p(\Sigma) \\ &- \#\left\{\lambda_{p,j},\ \frac{(-1)^{p+1}}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_{p,j}}{a} + (p-k+1)^2} < -1/2\right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$i = \sum_{2j-1 \leq k} \mathrm{b}_{2j-1} + \sum_{2j \geq k-1} \mathrm{b}_{2j} + b$$

où $b = 0$ si k est impaire et

$$b = \#\{\lambda_{k-1,j}, \lambda_{k-1,j} \leq a\}$$

si k est paire. En ce servant du fait que la caractéristique d'Euler de Σ est nulle, on peut donc énoncer

5.7. Proposition. — *Si (M^{2k}, g) est une variété riemannienne dont un voisinage de l'infini est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + (ar)^2 g)$ alors l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini et*

$$\mathrm{ind}_e\, D_{GB}^+ = \chi(M) + \sum_{0 \leq j \leq k-1} (-1)^{j+1} \mathrm{b}_j(\Sigma) + \beta$$

où $\beta = \mathrm{b}_k(\Sigma) + \mathrm{b}_{k-1}(\Sigma)$ si k est impaire et où $\beta = \#\{\lambda_{k-1,j}, \lambda_{k-1,j} \leq a\}$ si k est pair.

Plaçons maintenant dans le cas où $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$:
L'analyse faite au paragraphe précédent montre qu'il suffit de calculer l'indice de

$$\begin{pmatrix} \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{f'}{f} L\right) & 0 \\ 0 & \sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{f}\right) \end{pmatrix} W(\mathbf{R}, \mathcal{H}) \oplus W(\mathbf{R}, \mathcal{L}_1) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}) \oplus L^2(\mathbf{R}, \mathcal{L}_0),$$

or, l'indice de $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{f}\right) : W(\mathbf{R}, \mathcal{L}_1) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}, \mathcal{L}_0)$, est nul, il suffit donc de calculer l'indice de
$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{f'}{f} L\right) : W(\mathbf{R}, \mathcal{H}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H})$. Celui ci vaut

$$\sum_{p \in I} \mathrm{b}_p(\Sigma)$$

où I est l'ensemble des indices $p \in \{0, 1, .., 2k-1\}$ tels que si $c_p = (-1)^p \left(p - k + \frac{1}{2}\right)$ la fonction f^{-c_p} soit dans le complété de $C_0^\infty(]0, \infty[, \mathbf{R})$ muni de la norme

$$g \mapsto \left\| f^{-c_p} \frac{d}{dt} \left(f^{c_p} g\right) \right\|_{L^2} + |g(0)|.$$

Grâce à un changement de variable et à l'inégalité de Hardy, on peut montrer que cette condition équivaut à

$$\int_0^\infty f^{2c_p}(t) \frac{dt}{s^2} < \infty$$

où $ds = f^{2c_p} dt$. On détermine I uniquement dans les deux cas suivants :

i) lorsque $f(r) = e^{-r}$, alors $I = \{2j,\ 2j \leq k - 1/2\} \cup \{2j-1,\ 2j-1 \geq k-1/2\}$ et on a

$$\mathrm{ind}_e\, D_{GB}^+ = \chi(M) + \sum_{0 \leq j \leq k-1} (-1)^j \mathrm{b}_j.$$

On remarque que, dans ce cas là, une forme harmonique de degré paire sur $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + e^{-2r} g)$ qui est dans W est dans L^2 ; en effet celles dont la valeur au bord est dans $\mathcal{L}$ sont dans L^2, ceci résulte des calculs faits pour l'opérateur de Dirac, puis celle dont la valeur au bord est dans $\mathcal{H}$ sont des combinaisons linéaires des

$$r \mapsto \exp\left((-1)^p(p-k+1/2)\,r\right)\, h,$$

où $h \in \mathcal{H}$ est de degré p et où $(-1)^p(p-k+1/2) \leq 0$. Ainsi l'indice étendu est l'indice L^2 ; cette formule pour l'indice L^2 avait été obtenue par Brüning dans [Br]. Notons aussi que nous obtenons le même résultat si on suppose simplement que $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$ et que pour tout $\alpha \geq 1$, on a $\int_0^\infty f^\alpha < \infty$.

ii) Et lorsque $f(r) = r^{-a}$, $a > 0$, alors on a $I = \{p,\ 2ac_p \leq 1\}$ ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_e D^+_{GB} = \chi(M) + &\sum_{0\leq j\leq k-1} (-1)^j \mathrm{b}_j \\ &+ \sum_{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\leq 2j\leq k-1} \mathrm{b}_{2j} + \sum_{k\leq 2j+1\leq k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}} \mathrm{b}_{2j+1}.\end{aligned}$$

Ceci permet d'énoncer le théorème

5.8. Proposition. — *Soit (M^{2k}, g) une variété riemannienne dont un voisinage de l'infini est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)g)$ avec $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$, alors l'opérator de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini et si $f = e^{-r}$ ou si $f(r) = r^{-a}$ alors*

$$\operatorname{ind}_e D^+_{GB} = \chi(M) + \sum_{0\leq j\leq k-1} (-1)^j \mathrm{b}_j(\Sigma) + \beta,$$

où si $f = e^{-r}$ alors $\beta = 0$ et l'indice étendu est l'indice L^2 ; et si $f(r) = r^{-a}$ alors

$$\beta = \sum_{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\leq 2j\leq k-1} \mathrm{b}_{2j}(\Sigma) + \sum_{k\leq 2j+1\leq k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}} \mathrm{b}_{2j+1}(\Sigma).$$

Indice en dimension impaire. — Nous supposons maintenant que M est une variété riemannienne orientée de dimension impaire

$$\dim M = 2k + 1\ ;$$

et nous supposons toujours qu'un voisinage de l'infini Ω est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)g)$. Nous savons que $\operatorname{ind}_e D^+_{GB} = \frac{1}{2}\dim\left(\ker T^+_\Omega \,/\, \operatorname{Im} T^-_\Omega\right)$. En fait $\ker T^+_\Omega$ est engendré par les formes différentielles sur Σ qui s'étendent en une forme harmonique de W sur Ω alors que $\operatorname{Im} T^-_\Omega$ est l'espace de celles qui s'étendent en une forme harmonique L^2. Ainsi lorsque $f(r) = ar$, les calculs fait précédement montre que

$\ker T^+_\Omega$ est engendré par les vecteurs propres de $A + aL$ associés aux valeurs propres supérieures ou égales à $-a/2$.

$\operatorname{Im} T^-_\Omega$ est engendré par les vecteurs propres de $A + aL$ associés aux valeurs propres strictement supérieures à $a/2$.

Donc

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{1}{2}\#\,\{\mu, \mu \in \mathrm{Sp}(A + aL), |\mu| \leq a/2\,\}$$

Or les valeurs propres de $A + aL$ sont les

$(-1)^p(p - k)$ de multiplicité $\mathrm{b}_p(\Sigma)$.

Et les $\frac{(-1)^{p+1}}{2}a \pm \sqrt{\lambda_{p,j} + (p - k + 1/2)^2a^2}$ où $\lambda_{p,j}$ sont les valeurs propres non-nulles (répétées avec multiplicité) du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles cofermées.

On trouve donc

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{b}_k(\Sigma) + \#\{\lambda_{k,j},\ \lambda_{k,j} \leq 3a/4\} + \#\{\lambda_{k-1,j},\ \lambda_{k-1,j} \leq 3a/4\}\right);$$

Or le spectre du Laplacien sur les k-formes sur Σ est la réunion de 0 avec la multiplicité $\mathrm{b}_k(\Sigma)$, et du spectre du Laplacien sur les k-formes cofermées et du spectre du laplacien sur les $(k-1)$-formes cofermées. Donc si $E^k[0, \lambda]$ désigne le projecteur spectral du laplacien sur les k-formes différentielles sur Σ alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{1}{2}\dim E^k[0, \frac{3a}{4}].$$

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\lim f' = 0$, l'analyse précédente nous montre que

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{1}{2}\sum_{p\in J} \mathrm{b}_p(\Sigma)$$

où I est l'ensemble des indices $p \in \{0, 1, .., 2k-1\}$ tel que si $c_p = (-1)^p\left(p - k + \frac{1}{2}\right)$ alors

$$\int_0^\infty f^{2c_p}(t)\frac{dt}{s^2} < \infty,\ \text{avec } ds = f^{2c_p}dt,$$

mais que

$$\int_0^\infty f^{-2c_p}(t)dt = \infty.$$

On obtient ainsi $J = \{k\}$ si $f(r) = e^{-r}$ et $J = [k - 1/2a, k + 1/2a]$ si $f(r) = r^{-a}$ et on peut énoncer la

5.9. Proposition. — *Si (M^{2k+1}, g) est une variété riemannienne orientée de dimension $2k+1$ dont un voisinage de l'infini est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)g)$.*

Si pour $r > 1$ on a $f(r) = ar$ alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{1}{2}\dim E^k[0, \frac{3a}{4}],$$

où $E^k[0, \lambda]$ désigne le projecteur spectral du laplacien sur les k-formes différentielles sur Σ.

Si $f = e^{-r}$, alors

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{\mathrm{b}_k(\Sigma)}{2}.$$

Et si $f(r) = r^{-a}$, *alors*

$$\mathrm{ind}_e\, D^+_{GB} = \frac{1}{2} \sum_{k-\frac{1}{2a} \leq j \leq k+\frac{1}{2a}} \mathrm{b}_j .$$

6. Bibliographie.

[A-T] T. Ackermann, J. Tolksdorf. — *The generalized Lichnerowicz formula and analysis of Dirac operator*, J. reine angew. Math, **471** (1996), 23–42.

[A1] N. Anghel. — *An abstract index theorem on non-compact riemannian manifolds*, Houston J. Math., **19:2** (1993), 223–237.

[A2] N. Anghel. — *Index theory for short-ranged fields in higher dimensions*, J. Funct. Anal., **119** (1994), 19–36.

[A-P-S] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer. — *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975), 43–69.

[A-S-S] J. Avron, R. Seiler, B. Simon. — *The index of a pair of projections*, J. Funct. Anal., **120,n°2** (1994), 220–237.

[Bo] B. Bojarski. — *The abstract linear conjugation problem and Fredholm pairs of subspaces*, In Memoriam I.N. Vekua, Tbilisi,pp 45–60, 1979.

[B-W] B. Booss, K. Wojciechowski. — *Elliptic boundary problems for Dirac Operators*, Birkuser, Boston, 1993.

[B-M-S] N.V. Borisov, W. Müller, R. Schrader. — *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. Math. Phys., **114** (1988), 475–513.

[Br] J. Brüning. — *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry , **32** (1990), 491–532.

[Br-S] J. Brüning, R.T. Seeley. — *An index theorem for first order regular singular operators*, Amer. J. Math., **110** (1988), 659–714.

[Bu] U. Bunke. — *Relative Index theory*, J. Funct. Anal., **105** (1992), 63–76.

[Ca] A. P. Calderón. — *Boundary value problems for ellipic equations*, Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations, Novosibirsh, 1963.

[C1] G. Carron. — *Un théorème de l'indice relatif*, Prépublication n°196 de l'ENS Lyon, à paraitre dans Pacific J. Math., 1996.

[C2] G. Carron. — *L^2-harmonic forms on some asymptotically flat manifold*, Prépublication, 2000.

[Ch] A.W. Chou. — *The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive scalar curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 1–40.

[Da] E.B. Davies. — *Spectral Theory and differential operators*, Cambridge studies in advanced Mathematics, 1995.

[D] J. Dodziuk. — *L^2−harmonic forms on complete manifolds.*, Semin. differential geometry, Ann. Math. Stud. 102, 291-302 , 1982.

[Do] H. Donnelly. — *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal., **75** (1987), 362–381.

[G-L] M. Gromov, H.B. Lawson. Jr. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S., **58** (1983), 83–196.

[H] L. Hörmander. — *The analysis of linear partial differential operator, Vol III*, Springer-Verlag, New-York, 1985.

[P] R. Palais. — *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Annals of Math. Studies, 1965.

[R1] J. Roe. — *A note on the relative index theorem*, Quart. J. Mat. Oxford, **(2), 42** (1991), 365–373.

[R2] J. Roe. — *Partitioning non-compact manifolds and the dual Toeplitz problem*, In Operator Algebras and Applications,pp 187-228, Cambridge University Press, 1989.

[S] R.T. Seeley. — *Singular integrals and boundary value problems*, Amer. J. Math. , **88** (1966), 781–809.

[T] M. E.Taylor. — *Partial Differential Equations II*, Applied Mathematical Sciences n°116, Springer, 1996.