
Examen du 16 juin 2004

Durée 1h30, calculatrice non programmable et formulaire manuscrit autorisés ; l'énoncé est constitué de 3 exercices indépendants ; il sera tenu compte de la présentation des copies ; barème indicatif : 6+6+8

Exercice 1 On se propose de montrer la convergence et de calculer la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^3} \ .$$

1).a) A l'aide du changement de variable $t = \tan\theta$, montrer que pour tout $T > 0$, on a :

$$\int_0^T \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \int_0^{\arctan T} \cos^4\theta \, d\theta \ .$$

b) En faisant tendre T vers $+\infty$, montrer que l'intégrale généralisée est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta \ .$$

2).a) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta \ .$$

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$.

3). En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^3} \ .$$

Exercice 2 On rappelle le développement limité à l'ordre 2 de la fonction tangente :

$$\tan x = x + x^2\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

1). Démontrer directement que $\tan^2 x = x^2 + x^3\varepsilon_1(x)$, avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ avec x.

2). En déduire un développement limité de la dérivée $\tan' x$ à l'ordre 3, puis un développement à l'ordre 4 de $\tan x$ au voisinage de 0.

3). Déterminer un développement limité à l'ordre 4 de $\tan^2 x$.

4). En s'inspirant de la question 2)., en déduire un développement à l'ordre 5 de $\tan x$.

Exercice 3 Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

On admet que P est inversible.

1). Déterminer la matrice P^{-1}.

2). Montrer que

$$P^{-1}AP = B : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

3). Calculer B^n, puis A^n.