Université de Nantes **DEUG STPI Module M2**
Département de Mathématiques **Année 2004/2005**

Contrôle continu 2

Durée 2h30, sans calculatrice, formulaire manuscrit autorisé

Exercice 1 On considère la suire définie par récurrence par $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ et $u_0 = 1$.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle admet une limite qu'on désignera par l dans la suite.
3) a) Montrer que $l = \ln(1 + l)$.
b) En étudiant les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = x - \ln(1 + x)$, démontrer que $l = 0$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par

$$2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \text{ et } u_0 = 0,\ u_1 = 1\ .$$

1) On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1/2$.
2) Montrer que $v_n = 2^{-n}$.
3) En déduire que $u_n = 2 - 2^{-n+1}$, puis que la suite (u_n) admet une limite que l'on précisera.

Exercice 3 1) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de $\dfrac{e^x - 1}{x}$.
2) En utilisant une division suivant les puissances croissantes, déterminer le développement à l'ordre 3 de $\dfrac{x}{e^x - 1}$.
3) En déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{e^x - 1} - 1 \right)\ .$$

Barème indicatif : 6 +6 +8=20