**Université de Nantes** **DEUG STPI Module M2**
**Département de Mathématiques** **Année 2004/2005**

---

**Examen du 11 mai 2005**

*Durée 2h, calculatrice non programmable autorisée, formulaire manuscrit autorisé*

**Exercice 1** 1) Soit $T > 0$ ; à l'aide du changement de variable $x = t^2$, montrer que

$$\int_0^T \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{1}{2} \arctan(T^2) .$$

2) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt$ est convergente et déterminer sa valeur.
3) A l'aide du 1), de l'identité $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$ et du changement de variable $u = \cos x$, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x} dx = \frac{\pi}{4} .$$

**Exercice 2** Résoudre le système suivant dépendant du paramètre $m$ par la méthode du pivot de Gauss en distinguant les cas particuliers $m = 0$ et $m = 1$ :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{l} x - my + z = 1 \\ x + my + 2z = 3m + 1 \\ mx - m^2 y + z = 2m - m^2. \end{array} \right.$$

**Exercice 3** On considère la suite $(u_n)$ définie par récurrence par

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \text{ et } u_0 = 0,\ u_1 = 1 .$$

Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

et, pour $n \geq 1$, soit $X_n$ la matrice à une colonne

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} .$$

1) Montrer que pour $n \geq 1$, on a $X_{n+1} = AX_n$.
2) Soit $P$ la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On admet que $P$ est inversible. Déterminer $P^{-1}$.
3) Montrer que $P^{-1}AP = \text{ Diag } (0, 1, 2)$. En déduire l'expression de $A^n$.
3) De la question précédente, déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Barème indicatif** : 8 +4 +8=20