Université de Nantes | Licence STPI L1
Module Mathématiques 2 | Année 2005/2006

Examen de première session
Mardi 30 Mai 2006
Durée de l'épreuve : 2 heures

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Calculatrices et téléphones interdits. L'énoncé est constitué d'exercices indépendants. Votre rédaction se fera sur les feuilles prévues à cet effet. Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

Barême (à titre indicatif) : chaque Exercice sur 4 ***points.***

Exercice 1. ***"Un peu de calcul intégral"***
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2-7}{x^2-4}.$$

1. *Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, faire la décomposition en éléments simples de $f(x)$.*
2. *Déterminer toutes les primitives de f.*
3. *Déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.*

Exercice 2. ***"Une pincée de suite"***
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation pour $n \geqslant 0$

$$u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1. *A l'aide d'une récurrence, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 3 et minorée par 1.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.*
3. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.*
   Quelle est sa limite ?

Exercice 3. ***"Un zeste de DL"***

1. *Utiliser les développements limités pour déterminer la limite suivante :*
$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin(3x) - 3\sin(4x)}{x^3}.$$
2. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*
$$f(x) = e^{-x} + \ln(1+x).$$
   (a) *Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.*
   (b) *Donner l'équation de la tangente (T_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(0, f(0))$.*
   (c) *Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T_0) au voisinage de $(0, f(0))$?*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4. ***"Un nuage de système linéaire"***
En appliquant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système (S_λ) en fonction des valeurs du paramètre réel λ :

$$(S_\lambda)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & (4\lambda-3)z & = & 3\lambda-1 \\ x & + & y & + & (2\lambda-1)z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5. ***"Un soupçon de matrice"***
Soit la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer M^2 puis M^3.*
2. *Calculer $I_3 - 2M^2$ puis l'exprimer en fonction de M^3.*
3. *Calculer $2M - M^2$ puis $M \cdot (2M - M^2)$.*