Université de Nantes **Licence STPI L1**
Module Mathématiques 2 **Année 2005/2006**

Liste n°3
Développements limités

Exercice 1.

1. *Déterminer les développements limités suivants au voisinage de* 0 *et à l'ordre indiqué*

   a) ordre 6 : $e^x + \dfrac{1}{1+x}$

   b) ordre 6 : $3e^x - 2\cos x + \dfrac{1}{4}\sin x - 1$

   c) ordre 4 : $\cos(2x)$

   d) ordre 4 : e^{1+x}

   e) ordre 4 : $(\cos x)\sqrt{1+x^2}$

   f) ordre 3 : $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$

   g) ordre 4 : $\sqrt{4+x^2}$

   h) ordre 5 : $\dfrac{x}{\sin x}$

   i) ordre 4 : $\dfrac{\sin^2 x}{2+\sin^2 x}$

   j) ordre 4 : $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

   k) ordre 4 : $\sqrt{1+\ln(1+x)}$

2. *Faire de même pour les développements limités suivants au voisinage de* 0 *et à l'ordre* 4*, en utilisant* deux *méthodes :*

   a) $\cos^2 x$ *b)* $\sin^2 x$ *c)* $\ln(\cos x)$ *d)* $\ln(1+\sin x)$ *e)* $\ln(1+\cos x)$

Exercice 2.

1. *Montrer que lorsque* x *tend vers* 0*, la différence* $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ *a une limite finie.*
2. *De même, déterminer les limites suivantes :*

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos(3x)-\sin(3x)}{x^2}$

Exercice 3. "On regarde $\mathcal{C}_f$ avec un microscope"

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = (x+1)e^{-2x}$.
On notera $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de la fonction* f.

1. *Déterminer le développement limité au voisinage de* 0 *à l'ordre* 3 *de* $f(x)$.
2. *Donner une équation de la tangente* T *à* $\mathcal{C}_f$ *au point d'abscisse* 0.
3. *Etudier, au voisinage de* 0*, la position de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à* T.

Exercice 4. "On regarde $\mathcal{C}_f$ avec un télescope"

1. *Montrer que* $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de la fonction* f *définie par*
   $$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$
   admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
   Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ *et de son asymptote.*
2. (a) *Déterminer le développement asymptotique au voisinage de* $+\infty$ *de* $\sqrt{x^2+1}$.
   (b) *Application à l'étude de la branche infinie en* $+\infty$ *de la courbe d'équation* $y = \sqrt{x^2+1}$.