Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
Licence de Maths Classiques, module LC4

Devoir libre n°2

À rendre pour le Mercredi 21 avril

Exercice I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ; on notera f' sa fonction dérivée. On considère la fonction réelle de trois variables réelles x, y et z définie par

$$F(x, y, z) = \int_0^x f(ty^3 + z^3)\, dt\,.$$

1) Montrer que F a des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chaque variable en tout point de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que F est différentiable. Écrire la matrice de $DF(x, y, z)$.
3) Soit $G(x, y) := F(x, y, x)$. Montrer que G est différentiable et calculer sa différentielle $DG(x, y)$.

Exercice II

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes P à une indéterminée et de degré $\leq d$. On rappelle que $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension $d + 1$.
Soit $Q = X^3 - 2X + 1$. On considère l'application de composition $c : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$c(P) = Q \circ P\,.$$

Calculer sa différentielle en $P_0 = 2X + 1$. [Pour tout $H \in \mathbb{R}_1[X]$ on donnera l'expression du polynôme $Dc(P_0)(H) \in \mathbb{R}_3[X]$; ses coefficients dépendent linéairement des coefficients de H. Noter que l'on peut transformer le problème en un calcul différentiel d'une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ à l'aide de l'isomorphisme entre $\mathbb{R}_d[X]$ et $\mathbb{R}^{d+1}$].

Exercice III

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - z$.
1) Montrer que la surface S d'équation $f(x, y, z) = 0$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer l'équation du plan affine tangent en tout point m de S.
3) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction de classe C^2, $h : U \to \mathbb{R}$, telle que $h(0, 0) = 0$ et $f(x, y, h(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$.
Calculer la différentielle de h en $(0, 0)$ et retrouver l'équation du plan affine tangent à S au point $(0, 0, 0)$.