Faculté des sciences et techniques
Département de mathématiques

Licence de Mathématiques

Filière Mathématiques classiques

Calcul différentiel

I. Équations différentielles

Laurent Guillopé

`www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/LC4`

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (GÉNÉRALITÉS)

Une dynamique en temps continu est souvent modélisée par une équation différentielle[(1)], relation fonctionnelle entre une fonction $t \to x(t)$ et quelques unes de ses dérivées $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots$

Exemples 1.1. —

1. En mécanique, un point matériel m de masse M en mouvement dans $\mathbb{R}^3$ et soumis à une force $F = F(t, m)$ à son mouvement régi par l'équation de Newton $M\ddot{m}(t) = F(t, m)$.
2. En dynamique des populations (*mutatis mutandis* cinétique chimique,...), si le taux de variation est proportionnel à la population (modèle à corriger lorsque la taille de la population devient grande en regard de la nourriture disponible), on a l'équation différentielle
$$\dot{N} = kN.$$
Si on suppose que c'est le nombre des couples qui importe (si celui ci est petit *i. e.* lorsque N est petit, il y a peu de reproduction), on obtient l'équation différentielle
$$\dot{N} = kN^2,$$
La désintégration radioactive (dynamique d'une population d'éléments radioactifs voués à la disparition) est modélisée par l'équation différentielle
$$\dot{N} = -kN.$$
3. Un système *proies & prédateurs* (N et P resp.) est décrit par le système d'équations de Lotka-Volterra
$$\begin{cases} \dot{N} = aN - bNP, \\ \dot{P} = cNP - dP. \end{cases}$$

On se donne un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (l'espace des positions ou des observables du système), un intervalle ouvert (temporel) I de $\mathbb{R}$, une application $f : (t, x) \in I \times \Omega \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ qui décrit un champ de vitesses (ou de taux de variation des observables). L'équation différentielle du premier ordre s'écrit alors de manière condensée,

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

exprimant la recherche de solutions, *i. e.* fonctions $\gamma : t \in J \to \Omega$, dérivables sur J, telles que
$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = f(\gamma(t), t), \quad t \in J.$$
L'intervalle ouvert J pourra être strictement inclus dans l'intervalle I.

En introduisant des coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, avec f décrite par ses fonctions coordonnées
$$f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x)) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$
l'équation différentielle (1) s'exprime comme un système
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ & \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$
Si $n = 1$, on retrouve les équations différentielles scalaires $\dot{x} = f(t, x)$ (soit encore $y' = f(x, y)$).

Exemples 1.2. —

[(1)] La dérivée de f par rapport au temps t sera notée en général $\dot{f}$, préférant cette notation au classique f' ou $\frac{df}{dt}$.

1. L'équation scalaire linéaire $\dot{x} = a(t)x$ a comme solution $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ définie pour $t \in I$ si a est définie sur I.
2. Soit $x_0 > 0$. L'équation scalaire non linéaire $\dot{x} = x^2$ a comme solution $x(t) = x_0(1 - x_0 t)^{-1}$ définie sur $(-\infty, x_0^{-1})$.
3. L'équation linéaire $\dot{x} = Ax$ avec A matrice indépendante de t et x est résolue avec l'exponentielle matricielle : $x(t) = e^{At}x_0$.
4. L'équation newtonienne $\ddot{m} = F(t, m)$ se ramène à l'équation du premier ordre pour $P = (m, v)$

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F(t, m) \end{pmatrix}$$

Définition 1.1. — Une *condition initiale* de l'équation différentielle (1) est la donnée d'un temps initial $t_0 \in I$ et d'une position initiale $x_0 \in \Omega$.

Dans les bons cas (les hypothèses suffisantes pour cela seront précisées), pour toute condition initiale (t_0, x_0), il existe une solution maximale $x : t \in J \to x(t)$ de (1) vérifiant $x(t_0) = x_0$ et non prolongeable à un intervalle contenant strictement J.

Exemple 1.3. — Soit $x : t \in J \to x(t)$ une solution maximale de $\dot{x} = x^2$ avec donnée initiale (t_0, x_0) où $x_0 > 0$ et $\widetilde{J}$ le plus grand intervalle de $J = (a, b)$ où $x(t)$ ne s'annule pas : par continuité, $\widetilde{J}$ contient un voisinage de t_0 et $\widetilde{J}$ est ouvert, soit $\widetilde{J} = (\widetilde{a}, \widetilde{b})$. Sur $\widetilde{J}$, $\dot{x}(t)/x(t)^2 = 1$, soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -1,$$

et, par intégration sur $[t, t_0]$,

$$\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x_0} = t_0 - t,$$

d'où

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}. \tag{2}$$

Si $\widetilde{a} > -\infty$, $x(\widetilde{a}^+)$ est fini strictement positif : si $\widetilde{a} > a$, alors $x(\widetilde{a}) > 0$ et $\widetilde{a} \in \widetilde{J}$, ce qui n'est pas ; si $\widetilde{a} = a$, on peut prolonger $x(t)$ au voisinage de a en prenant (2) et J n'est pas maximal. Donc $\widetilde{a} = -\infty$ et par suite $a = -\infty$.

Si $x(\widetilde{b}^-)$ est fini, à nouveau $\widetilde{b} < b$ n'est pas possible (sinon $\widetilde{b} \in \widetilde{J}$), pas plus que $b = \widetilde{b}$ (prolongement de la solution). Ainsi $x(\widetilde{b}^-) = +\infty$ et donc $\widetilde{b} = t_0 + 1/x_0$ et $b = \widetilde{b}$. Finalement $J = (-\infty, t_0 + x_0^{-1})$.

Si $x_0 < 0$, un raisonnement analogue donne $J = (t_0 + 1/x_0, +\infty)$ avec la forme (2) pour la solution.

La solution avec condition initiale $(t_0, 0)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, constante égale à 0 : c'est une solution ; si une solution avec une telle donnée initiale était non nulle en t_1, alors, on aurait une solution des types précédents (*i. e.* avec une donnée initiale $(t_1, x(t_1))$ non nulle), qui ne s'annule jamais, ce qui n'est pas.

Définition 1.2. — L'équation (1) est dite autonome si f ne dépend pas du temps.

$\triangle$ Une équation autonome en une variable est un cas particulier d'équations dites à variables séparables.

Si $t \in I \to x(t)$ est solution d'une équation autonome, il en est de même pour $t \in t_0 + I \to x(t - t_0)$. Comme temps de la condition initiale, on se limitera souvent (dans le théorème suivant par exemple) à prendre $t_0 = 0$.

Quitte à rajouter le temps t comme variable de configuration et une autre variable temporelle τ reliée à t suivant $\frac{dt}{d\tau} = 1$, on peut toujours se ramener à des systèmes autonomes. $\triangledown$

Théorème 1.1. — *On suppose f de classe C^1, $f(m_0) = 0$ et $f(x) > 0$ si $x > m_0$. Soit l'équation autonome $\dot{x} = f(x)$. Pour la condition initiale $(0, m_0)$, la solution maximale est la fonction constante $x(t) = m_0, t \in \mathbb{R}$. Pour la condition initiale $(0, x_0)$ avec $x_0 > m_0$, l'intervalle J contient $(-\infty, 0]$ et $x(t)$ est la fonction réciproque de $x \in (m_0, \infty) \to t(x) = \int_{x_0}^{x} du/f(u)$.*

Démonstration. — On commence par le lemme suivant

Lemme 1.1. — *Avec les hypothèses du théorème précédent, soit $x_0 > m_0$ et t la fonction définie sur (m_0, ∞) par $x \to t(x) = \int_{x_0}^{x} du/f(u)$. Alors, la fonction t est de classe C^1, strictement croissante avec $\lim_{x \to m_0^+} t(x) = -\infty$.*

Preuve du lemme. — Pour $\delta > 0$ petit, écrivons

$$\int_{x_0}^{x} \frac{du}{f(u)} = -\int_{x}^{m_0+\delta} \frac{du}{f(u)} + \int_{x_0}^{m_0+\delta} \frac{du}{f(u)}$$

Si f' est majorée par C sur $[m_0, m_0+\delta]$, d'après le théorème des accroissements finis, pour un $\theta_x \in (m_0, x)$ on a

$$0 < f(x) = f(x) - f(m_0) = f'(\theta_x)(x-m_0) \leq C(x-m_0), \quad x \in (m_0, m_0+\delta).$$

Par suite

$$\int_{x}^{m_0+\delta} \frac{du}{f(u)} \geq \int_{x}^{m_0+\delta} \frac{du}{C(u-m_0)} = C^{-1}\left(\log(m_0+\delta) - \log x\right).$$

Le lemme en résulte. $\square$

La fonction $t(x)$ est strictement croissante continue, d'image $I = (-\infty, t_+)$ avec t_+ fini ou $+\infty$. Soit $t \to x(t)$ son application inverse. Alors

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\dot{t}(x(t))} = \frac{1}{1/f(x(t))} = f(x(t))$$

et $t \in I \to x(t)$ est solution de l'équation différentielle. En considérant le sous-intervalle $\widetilde{I}$ de I, contenant 0 et tel que $f(x(t)) > m_0$, on montre que cette solution est maximale comme dans l'exemple 1.3 (qui résout explicitement l'équation autonome du théorème avec $f(x) = x^2, m_0 = 0$) et unique. $\square$

Une équation différentielle d'ordre k pour $x : t \in I \to \mathbb{R}^n$

$$x^{(k)} = F(t, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(k-1)})$$

se ramène à une équation d'ordre 1 pour $X : t \in I \to \mathbb{R}^{kn}$

$$\dot{X} = f(t, X)$$

en ayant posé

$$f(t, (x_1, \ldots, x_{k-1})) = (x_2, \ldots, x_{k-1}, F(t, x_1, \ldots, x_{k-1}))$$

et $X = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(k-1)})$.

Ainsi les équations différentielles du second ordre de la mécanique

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

peuvent être vues comme des équations différentielles du premier ordre,

Proposition 1.1. — *Une équation différentielles du deuxième ordre*

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \tag{3}$$

sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^n$ *équivaut à l'équation différentielle du premier ordre sur* $\Omega \times \mathbb{R}^n (\subset \mathbb{R}^{2n})$ *donnée par*

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = f(t, x, v), \end{cases} \qquad (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Si $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ *est solution de* (3), *alors* $\Gamma = (\gamma, \dot{\gamma}) : J \to \Omega \times \mathbb{R}^n$ *est solution de* (4).

Exemple 1.4. — L'équation du pendule avec frottement

$$\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x}$$

est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\sin x - kv \end{cases}$$

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soit A matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On étudie ici l'équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants

$$\text{(EDLH)} \qquad \dot{x} = Ax,$$

où x désigne une fonction $t \in I \to x(t) \in \mathbb{R}^n$.

L'équation scalaire ($n = 1$) a comme solution l'exponentielle $t \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{at}$. L'équation en dimension n quelconque se résout simplement avec l'exponentielle matricielle e^{tA} dont la définition et quelques propriétés font l'objet du paragraphe suivant.

2.1. Exponentielle matricielle

On considère $\mathbb{R}^n$ normé par

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Une suite $(v_m)_{m\geq 0}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ converge vers $v_\infty \in \mathbb{R}^n$ si les suites réelles des coordonnées convergent vers les coordonnées de v_∞ : cela revient à montrer que la suite $(\|v_m - v_\infty\|_\infty)_{m\geq 0}$ converge vers 0.

Cette norme sur $\mathbb{R}^n$ induit une fonction sur l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$ (identifié à l'espace des endomorphismes $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$) définie par

$$\|A\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|_\infty = 1}} \|Av\|_\infty$$

qui vérifie

Lemme 2.1. — 1. *Si $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sup_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.*

2. *L'application $A \in M_n(\mathbb{R}) \to \|A\| \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.*
3. *Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.*

Démonstration. —

$$\|Av\|_\infty = \sup_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right| \leq \sup_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, \|v\|_\infty$$

Le sup est atteint pour $v = (\operatorname{sign} a_{Ij})$ avec I tel que $\sum_{j=1}^n |a_{Ij}| = \sup_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

La norme de A est nulle si et seulement si $\|Av\| = 0$ pour tout v de norme 1, *i. e.* si et seulement si A est nulle. On a

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|_\infty = 1}} \|\lambda Av\| = |\lambda| \sup_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|_\infty = 1}} \|Av\| = |\lambda|\,\|A\|$$

puis, pour v de norme 1,

$$\|(A+B)v\| \leq \|Av\| + \|Bv\| \leq \|A\| + \|B\|$$

soit en prenant le sup sur les v unitaires, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, ce qui achève de montrer que $A \to \|A\|$ est une norme.

La dernière inégalité résulte de

$$\|ABv\| \leq \|A\|\,\|Bv\| \leq \|A\|\,\|B\|\,\|v\|. \qquad \square$$

$\triangle$ La convergence dans $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ sera établie suivant la norme de la proposition précédente. On démontre en fait que cette convergence est indépendante de la norme choisie sur $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, de même que sa complétude. $\triangledown$

Théorème 2.1. — 1. *La série*

$$\operatorname{Exp}(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots \tag{5}$$

est absolument convergente. On notera souvent $\operatorname{Exp} A$ *par* e^A.

2. *Si* A *et* B *commutent,* $\operatorname{Exp}(A+B) = \operatorname{Exp} A \operatorname{Exp} B$.
3. $\operatorname{Exp} A = \lim_{n\to\infty}(1 + A/n)^n$,
4. $A \operatorname{Exp} A = (\operatorname{Exp} A)A$.

Démonstration. — Soit $a_{ij}(k)$ le (i,j)-coefficient de la puissance A^k. On a

$$|a_{ij}(k)| \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

ainsi la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}(k)/k!$ est absolument convergente, car dominée par la série $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k/k! = \mathrm{e}^{\|A\|}$. L'espace des matrices M_n étant de dimension finie, il est complet et donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} A/k!$ est convergente

Soit $E_K(A)$ la série tronquée au k-ième terme : $E_K(A) = \sum_{k=0} A/k!$. On a, d'une part, en appliquant la formule du binôme légitime vu que A et B commutent,

$$E_K(A+B) = \sum_{k=0}^{K} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} A^\ell B^{k-\ell} = \sum_{\substack{0\leq \ell,m \leq K\\ \ell+m\leq K}} \frac{A^\ell}{\ell!}\frac{B^m}{m!}$$

et d'autre part

$$E_K(A)E_K(B) = \sum_{\ell=0}^{K} \frac{A^\ell}{\ell!} \sum_{m=0}^{K} \frac{B^m}{m!} = \sum_{0\leq \ell,m\leq K} \frac{A^\ell}{\ell}\frac{A^m}{m!}$$

d'où

$$\begin{aligned}||E_K(A)E_K(B) - E_K(A+B)|| &\leq \left\| \sum_{\substack{0\leq \ell,m \leq K\\ \ell+m> K}} \frac{A^\ell}{\ell}\frac{A^m}{m!} \right\| \leq \sum_{\substack{0\leq \ell,m \leq K\\ \ell+m> K}} \frac{\|A\|^\ell}{\ell}\frac{\|B\|^m}{m!} \\ &= E_K(\|A\|)E_K(\|B\|) - E_K(\|A\| + \|B\|)\end{aligned}$$

Lorsque $K\to\infty$, le terme $E_K(A)E_K(B) - E_K(A+B)$ tend vers $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B - \mathrm{e}^{A+B}$, alors que $E_K(\|A\|)E_K(\|B\|) - E_K(\|A\|+\|B\|)$ tend vers $\mathrm{e}^{\|A\|}\mathrm{e}^{\|B\|} - \mathrm{e}^{\|A\|+\|B\|}$ qui est nul. S'en déduit l'égalité $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$.

On a

$$\begin{aligned}E_n(A) - \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{A^k}{k!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{A^k}{n^k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right),\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\left\| E_n(A) - \left(1+\frac{A}{n}\right)^n \right\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right) \\ &\leq E_n(\|A\|) - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n.\end{aligned} \tag{6}$$

Le membre de gauche converge donc vers 0 : c'est la convergence $(1+A/n)^n \to \mathrm{e}^A = \lim_{n\to\infty} E_n(A)$.

Pour la dernière affirmation, on a

$$A\mathrm{e}^A = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}A = \mathrm{e}^A A. \qquad \square$$

$\triangle$ La définition de la fonction exponentielle sur $M_n(\mathbb{R})$ se prolonge sans difficultés à $M_n(\mathbb{C})$, avec les même propriétés. $\triangledown$

Corollaire 2.1. — 1. $\operatorname{Exp}((t_1+t_2)A) = \operatorname{Exp}(t_1A)\operatorname{Exp}(t_2A)$.

2. *Si* $A = D + N$ *avec* $D = D[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$ *diagonale et* N *nilpotente commutant avec* D, *on a*

$$\operatorname{Exp}(D+N) = D[\mathrm{e}^{\lambda_1},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n}](I + N + \ldots + N^k/k!).$$

3. *Si* P *est inversible,* $\operatorname{Exp}(PAP^{-1}) = P\operatorname{Exp}(A)P^{-1}$.
4. *Si* $Av = \lambda v$, *alors* $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^\lambda u$.
5. $\operatorname{spec}\operatorname{Exp} A = \mathrm{e}^{\operatorname{spec} A}$.
6. $\operatorname{dét} \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

Démonstration. — La première propriété résulte de la proposition précédente. Pour la forme de l'exponentielle d'une matrice diagonale, nilpotente ou conjuguée, il faut revenir à la définition (5) de l'exponentielle en terme de série. Il en est de même pour l'évaluation de e^A sur un vecteur propre. Les dernières propriétés résultent d'une forme triangulaire de la matrice A, obtenue via conjugaison par une matrice inversible (éventuellement à coefficients complexes, voir la remarque 2.1 ci-dessous pour éviter ce passage en complexe). □

Théorème 2.2. — *L'application* $t \to \operatorname{Exp}(tA)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $t \to A \operatorname{Exp}(tA)$.

Démonstration. — Il suffit d'étudier la dérivabilité en $t=0$, vu que

$$\operatorname{Exp}((t+u)A) = \operatorname{Exp}(tA)\operatorname{Exp}(uA).$$

On a

$$\frac{\operatorname{Exp}(uA) - \mathrm{Id}}{u} = A + u\left(\frac{A^2}{2!} + \ldots + u^{k-2}\frac{A^k}{k!} + \ldots\right)$$

où le dernier facteur est majoré par $\mathrm{e}^{\|A\|}$ si $|u| \leq 1$. En résulte

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{Exp}(Au) - I}{u} = A.$$ □

△ L'application $\varphi_A : t \to \operatorname{dét} \mathrm{e}^{tA}$ est dérivable et vérifie $\varphi_A(t+s) = \varphi_A(t)\varphi_A(s)$: ainsi φ_A vérifie l'équation différentielle $\dot{x} = \varphi_A'(0)x$ dont la solution est $x(t) = \mathrm{e}^{\varphi_A'(0)t}$. On a

$$\varphi_A(t) = \operatorname{dét}(\mathrm{Id} + tA + \mathcal{O}(t^2)) = \operatorname{dét}(\mathrm{Id} + tA) + \mathcal{O}(t^2) = 1 + t \operatorname{tr} A \mathcal{O}(t^2)$$

où $\mathcal{O}(t^2)$ désigne un terme majoré par Ct^2 au voisinage de $t=0$. Ainsi $\varphi_A'(0) = \operatorname{tr} A$ et on a prouvé $\operatorname{dét} \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{tA}$ en évitant le recours à une triangularisation de A qui nécessite éventuellement le passage en complexe. ▽

Exemples 2.1. —

1. Identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, l'action de la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la rotation de $+\pi/2$, correspond à la multiplication par i dans $\mathbb{C}$. L'équation différentielle $\dot{x} = Rx$ se traduit dans $\mathbb{C}$ comme $\dot{z} = \mathrm{i}z$, de solution $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}z_0$. Le complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ correspond ainsi à la matrice $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{tR}$.
2. Soit D l'opérateur de dérivation sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. L'équation différentielle $\dot{x} = Dx$ a pour solution la fonction $t \to P(X+t)$ si la condition initiale est $(0, x_0 = P(X))$. La formulation en terme d'exponentielle $P(X+t) = \mathrm{e}^{tD}P = \sum_{k \geq 0} t^k D^k P/(k!)$ est simplement la formule de Taylor

$$P(X+t) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} P^{(k)}(X).$$

2.2. L'existence-unicité des solutions

Théorème 2.3. — *Soit* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *L'équation* (EDLH), *avec comme condition initiale* $x(t_0) = x_0$, *a comme unique solution la fonction*

$$t \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0$$

définie sur $\mathbb{R}$ *tout entier.*

Démonstration. — Vu que $\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At}$, on vérifie que $\mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0$ est solution de (EDLH) avec $x(t_0) = x_0$.

Pour l'unicité, si $x(t)$ est une solution de (EDLH), la fonction y définie par $y(t) = \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}x(t), t \in I$, qui vérifie alors

$$\dot{y}(t) = -A\mathrm{e}^{-A(t-t_0)}x(t) + \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}Ax(t) = 0$$

est constante, soit $y(t) = x_0$ et donc $x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}y(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0$. □

Théorème 2.4. — *L'ensemble* S *des solutions de* (EDLH) *définies sur* $\mathbb{R}$ *est un espace vectoriel et l'application* $\mathrm{Év}_{t_0} : x \in S \to x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Vu la forme de l'équation différentielle (EDLH), si x_1 et x_2 sont des solutions, il en est de même de $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ pour α_1, α_2 réels. L'application $\mathrm{Év}_{t_0}$ est linéaire et son caractère bijectif résulte des existence et unicité du théorème précédent. □

$\triangle$ Ainsi, si un ensemble de données initiales $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_d(t_0))$ est libre, les solutions $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ ont des positions $(x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_d(t_1))$ linéairement indépendantes en tout temps t_1. $\triangledown$

2.3. Orbites et portrait de phase

Définition 2.1. — Soit $\dot{x} = Ax$. L'*orbite* de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est la partie $\mathcal{O}_{x_0} = \{e^{At}x_0, t \in \mathbb{R}\}$. Le *portrait de phase* est la collection de ces orbites.

Exemple 2.2. — L'orbite de $x = 0$ est réduite à un point : $\mathcal{O}_0 = \{0\}$. En général, l'orbite est l'image d'une courbe paramétrée par $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. — *Les orbites partitionnent* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — L'union des orbites recouvre $\mathbb{R}^n$ puisque tout point x est dans son orbite $\mathcal{O}_x$. Si $\widetilde{x} \in \mathcal{O}_x$, on a $\widetilde{x} = e^{\widetilde{t}A}x$. Ainsi

$$e^{tA}\widetilde{x} = e^{tA}e^{\widetilde{t}A}x = e^{(t+\widetilde{t})A}x$$

et $\mathcal{O}_{\widetilde{x}} \subset \mathcal{O}_x$, avec $x \in \mathcal{O}_{\widetilde{x}}$ (prendre $t = -\widetilde{t}$ dans l'équation précédente). Par symétrie, on en déduit $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}_{\widetilde{x}}$ et l'égalité $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{\widetilde{x}}$: des orbites sont ainsi soit disjointes, soit égales. $\square$

La classification qualitative des portraits de phase des équations (EDLH) dans le plan est basée sur la typologie spectrale des matrices réelles d'ordre 2. Une matrice A a comme polynôme caractéristique $P_A(X) = X^2 - \operatorname{tr} A\, X + \operatorname{dét} A$ de discriminant $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \operatorname{dét} A$.

Cas 1 : La matrice a deux valeurs propres non réelles imaginaires conjuguées $\lambda_\pm = \alpha \pm i\omega$, avec vecteurs propres $v_\pm$, linéairement indépendants et tels que $v_- = \overline{v_+}$. Les vecteurs réels

$$v_1 = (v_+ + v_-)/2, v_2 = (v_+ - v_-)/(2i)$$

sont ($\mathbb{R}$-)indépendants et on a

$$e^{tA}v_1 = \frac{e^{tA}v_+ + e^{tA}v_-}{2} = \frac{e^{\lambda_+ t}v_+ + e^{\lambda_- t}v_-}{2} = e^{\alpha t}(\cos\omega t\, v_1 - \sin\omega t\, v_2),$$
$$e^{tA}v_2 = \frac{e^{tA}v_+ - e^{tA}v_-}{2i} = \frac{e^{\lambda_+ t}v_+ - e^{\lambda_- t}v_-}{2i} = e^{\alpha t}(\sin\omega t\, v_1 + \cos\omega t\, v_2),$$

et, plus généralement pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, le vecteur $e^{tA}(c_1v_1 + c_2v_2)$ a pour coordonnées dans la base (v_1, v_2)

$$e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$, les orbites sont des ellipses. Sinon, ce sont des spirales, qui, suivant le signe de α, s'éloignent à l'infini ou convergent vers l'origine lorsque $t \to +\infty$. Ce cas est appelé *foyer-source*.

Cas 2 : La matrice A a deux valeurs propres distinctes $\lambda_\pm$ de même signe, avec vecteurs propres (réels) $v_\pm$, : on suppose ici $0 < \lambda_- < \lambda_+$ (le cas des valeurs propres négatives se traitant pas inversion du temps : $At = (-A)(-t)$).

$$e^{tA}(c_+v_+ + c_-v_-) = c_+e^{\lambda_+ t}v_+ + c_-e^{\lambda_- t}v_-$$

Les orbites de $\pm v_\pm$ sont des demi-droites, les autres orbites étant des courbes allant de l'origine ($t \sim -\infty$) à l'infini ($t \sim +\infty$) tangentes à l'axe $\mathbb{R}v_+$ à l'origine. Cette configuration est appelée *nœud-source*.

Cas 3 : la matrice A a deux valeurs propres réelles de signes opposés $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, de vecteurs propres associés $v_\pm$. Les demi-axes $\pm\mathbb{R}^+v_\pm$ sont des orbites, l'origine étant atteinte pour $t = \mp\infty$. Les autres orbites sont des arcs de pseudo-hyperbole $c_+(t)^{|\lambda_-|}c_-(t)^{\lambda_+} = \text{cste}$. Cette configuration est appelée *selle*.

Cas limites : Les cas limites $\lambda_- < \lambda_+ = 0$, $\lambda_- = 0 < \lambda_+$, une matrice A non diagonalisable,... sont laissés au lecteur.

2.4. Équation linéaire inhomogène

Si $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ et $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continue, l'équation est du type

$$\text{(EDLNH)} \qquad \dot{x} = Ax + B$$

Toute solution de (EDLNH) est somme d'une solution particulière de (EDLNH) et d'une solution quelconque de (EDLH). On recherche une solution particulière par la méthode de la *variation de la constante*. On écrit x sous la forme $x(t) = e^{A(t-t_0)}y(t)$: $y(t) = e^{-A(t-t_0)}x(t)$ est dérivable et x a comme dérivée

$$\dot{x}(t) = e^{A(t-t_0)}(Ay(t) + \dot{y}(t)).$$

Reportant dans l'équation différentielle (EDLNH) vérifiée par x, on obtient $\dot{y}(t) = \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}B(t)$, soit

$$y(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s-t_0)} B(s) ds$$

et finalement

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} B(s) ds.$$

2.5. Équation différentielle du second ordre

Si s, p sont des constantes réelles, l'équation

$$(\mathrm{ED}_2) \qquad \ddot{x} - s\dot{x} + px = 0$$

se ramène au système linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{ED}_1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -py + sv \end{cases}$$

soit, si $X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} X.$$

Exemple 2.3. — Le pendule avec frottement et oscillations faibles (ce qui permet de remplacer $\sin\theta$ par θ) a pour équation $\ddot{\theta} = -\theta - k\dot{\theta}$, soit le système

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} = -\theta - kv. \end{cases}$$

Le discriminant du système est $k^2 - 4$: si $0 < k < 2$, on a des petites oscillations qui dans le plan (θ, v) spiralent vers l'équilibre $(\theta, v) = (0, 0)$ suivant une configuration nœud-foyer ; si $k > 2$, on a des valeurs propres négatives et les solutions convergent vers l'équilibre suivant la configuration nœud-source. Dans le premier cas, le pendule oscille, dans le second il va à l'équilibre directement.

2.6. Approximation d'Euler

Approchant une solution x de $\dot{x} = f(x)$ par son développement limité au premier ordre, Euler propose d'écrire

$$x(t + \Delta t) \sim x(t) + f(x(t))\Delta t.$$

Ainsi, pour la solution x sur $[t_0, t]$ de l'équation linéaire autonome $\dot{x} = Ax$ avec condition initiale (t_0, x_0), l'itération de cette approximation avec pas $\Delta t = (t - t_0)/n$ introduit la suite $(u(n)_k)_{k=0,\dots,n}$ telle que

$$u(n)_0 = x_0 \quad \text{et} \quad u(n)_{k+1} = u(n)_k + Au(n)_k(t - t_0)/n, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Le terme $u(n)_n$ approche la valeur exacte $x(t)$ lorsque $n \to \infty$. En effet

$$u(n)_n = \left(1 + A\frac{t - t_0}{n}\right) u(n)_{n-1} = \ldots = \left(1 + A\frac{t - t_0}{n}\right)^n x_0$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} u(n)_n = \operatorname{Exp}\left(A(t - t_0)\right) x_0.$$

Plus généralement, la suite $u(n)_k$ détermine la fonction $X(n)$, affine par morceaux définie par

$$X(n)(t_0 + (k + \delta)(t - t_0)/n) = (1 - \delta)u(n)_k + \delta u(n)_{k+1}, \quad , k = 0, \dots, n-1, \delta \in [0, 1],$$

i. e. $X(n)$ est affine sur $[t_0 + k(t - t_0)/n, t_0 + (k+1)(t - t_0)/n]$, valant $u(n)_k = \left(1 + A\frac{t-t_0}{n}\right)^k x_0$ au point $t_0 + k(t - t_0)/n$. La fonction $X(n)$ approche la solution x de $\dot{x} = Ax$, vu que pour $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n,k\to\infty \\ k/n\to\theta}} X(n)\left(t_0 + k\frac{t - t_0}{n}\right) &= \lim_{\substack{n,k\to\infty \\ k/n\to\theta}} \left(1 + A\frac{t - t_0}{n}\right)^k x_0 \\ &= \operatorname{Exp}\left(\theta(t - t_0)A\right) x_0 = x(t_0 + \theta(t - t_0)). \end{aligned}$$

Cette convergence est montrée en reprenant les inégalités (6).

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES NON AUTONOMES (COEFFICIENTS VARIABLES)

Soit $t \in I \to A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. On étudie ici l'équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients variables

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{EDL}$$

où x désigne une fonction $x : t \in I \to x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 3.1. — L'équation de Bessel

$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0$$

définit des fonctions classiques J_ν, Y_ν.

3.1. Intégration de fonctions à valeurs vectorielles

Soit $t \in [a,b] \to f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ une fonction continue à valeurs vectorielles. On définit l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ comme le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les intégrales les fonctions coordonnées f_i

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Le vecteur est limite de ses sommes de Riemann

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Ainsi grâce à l'inégalité triangulaire et un passage à la limite,

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

3.2. Le théorème d'existence et d'unicité

Théorème 3.1. — *Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale $t \in I \to x(t) \in \mathbb{R}^n$ de (EDL).*

L'espace S des solutions maximales de (EDL) est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\text{Év}_{t_0} : x \in S \to x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.

On remplace l'équation différentielle (EDL) avec condition initiale (t_0, x_0) par l'équation intégrale équivalente

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds, \quad t \in I. \tag{EI}$$

Soit $\sigma = [a_\sigma, b_\sigma]$ un segment de I contenant t_0 et de longueur ℓ_σ, E_σ l'espace des fonctions continues sur σ à valeurs dans $\mathbb{R}$ normé suivant

$$\|x\|_\sigma = \sup_{s\in\sigma} \|x(s)\|, \quad x \in E_\sigma,$$

qui fait de E_σ un espace de Banach. et T_σ la transformation de l'espace E_σ définie par

$$T_\sigma(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds, \quad t \in \sigma.$$

L'équation (EI) portant sur une fonction $x \in E_\sigma$ est simplement l'équation au point fixe $T_\sigma(x) = x$. On va construire la solution x par la méthode des approximations successives de Picard : $\mathbf{x}_0$ est la fonction constante sur σ valant x_0 et x_m définie par $x_m = T_\sigma^m(\mathbf{x}_0)$ pour $m \geq 1$. On a $x_m = T_\sigma(x_{m-1})$ si $m \geq 2$.

Lemme 3.1. — *Soit A_σ un majorant de $\|A(t)\|$ pour $t \in \sigma$. Alors, pour x, x' des fonctions de E_σ,*

$$\|T_\sigma^m x(t) - T_\sigma^m x'(t)\| \leq \frac{(A_\sigma |t - t_0|)^m}{m!} \|x - x'\|_\sigma, \quad t \in \sigma.$$

Démonstration. — On fait une récurrence. Pour $m = 0$, c'est clair. Supposant le vrai au rang m, on a pour $t \in \sigma$

$$\begin{aligned}
\|T_\sigma^{m+1}x(t) - T_\sigma^{m+1}x'(t)\|_\infty &\leq \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(T_\sigma^m x(s) - T_\sigma^m x'(s))ds \right\|_\infty \\
&\leq A_\sigma \left| \int_{t_0}^{t} \|T_\sigma^m x(s) - T_\sigma^m x'(s)\|_\infty ds \right| \\
&\leq A_\sigma \left| \int_{t_0}^{t} A_\sigma^m \frac{|s - t_0|^m}{m!} \|x - x'\|_\sigma ds \right| \\
&\leq A_\sigma^{m+1} \left[\left| \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^m}{m!} ds \right| \right] \|x - x'\|_\sigma \\
&\leq A_\sigma^{m+1} \frac{|t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \|x - x'\|_\sigma.
\end{aligned}$$

□

△ La transformation T_σ est éventuellement contractante, *i. e.* il existe m telle que T_σ^m soit contractante. La preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz assure de la contractance de T sur un espace de trajectoires définies sur l'intervalle de temps $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, sans pour autant assurer qu'une puissance T^m (pour un intervalle de temps arbitraire) ne soit contractante. ▽

Preuve du théorème. — La convergence de la suite $(T_\sigma^m \mathbf{x}_0)_{m \geq 0}$ est équivalente à la convergence de la série

$$\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (T_\sigma^{k+1}\mathbf{x}_0 - T_\sigma^k \mathbf{x}_0).$$

Son terme général $T_\sigma^k(T_\sigma \mathbf{x}_0) - T_\sigma^k \mathbf{x}_0$ a sa norme majorée par $(A_\sigma \ell_\sigma)^k / k! \|T_\sigma \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\|_\sigma$: la série est donc absolument convergente dans E_σ. Passant à la limite x_∞ dans $T_\sigma^{m+1}\mathbf{x}_0 = T_\sigma(T_\sigma^m \mathbf{x}_0)$, on obtient que x_∞ est un point fixe de T_σ, *i. e.* x_∞ vérifie

$$x_\infty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x_\infty(s)ds.$$

Ainsi l'équation (EI) a x_∞ comme solution sur σ. Si $\widetilde{x}$ est une autre solution de (EI) sur σ, on a d'après le lemme

$$\|x_\infty(t) - \widetilde{x}(t)\|_\infty = \|T_\sigma^m x_\infty(t) - T_\sigma^m \widetilde{x}(t)\|_\infty \leq \frac{(A_\sigma \ell_\sigma)^m}{m!} \sup_{s \in \sigma} \|x_\infty(s) - \widetilde{x}(s)\|_\infty$$

ce qui n'est possible que si $\sup_{s \in \sigma} \|x_\infty(s) - \widetilde{x}(s)\|_\infty = 0$ vu que $\frac{(A_\sigma \ell_\sigma)^m}{m!} < 1$ pour m assez grand. La solution de (EI) sur σ est donc unique : elle sera notée x_σ.

Si σ' est un segment contenant σ et contenu dans I, la restriction à σ de $x_{\sigma'}$ coïncide avec x_σ. En résulte l'existence et l'unicité de la solution de (EI) sur l'intervalle I.

Pour montrer la dernière partie du théorème, on remarque que l'application $\mathrm{Év}_{t_0} : x \in S \to x(t_0)$ est linéaire. L'existence de la solution de (EDL) avec condition initiale (t_0, x_0) correspond à la surjectivité de cette application, alors que son injectivité résulte de l'unicité. □

Exemple 3.2. — L'équation différentielle $t\dot{x} = \alpha x$ a pour solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ $x(t) = x_0(t/t_0)^\alpha$, qui se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier si $x_0 = 0$ ou $\alpha \geq 1$ (sans que ce prolongement soit unique).

3.3. La résolvante

D'après le théorème 3.1, l'application Év_{t_0} qui a une solution de $\dot{x} = A(t)x$ associe la valeur $x(t_0) \in \mathbb{R}$ est un isomorphisme.

Définition 3.1. — Soit l'équation différentielle $\dot{x} = A(t)x$ et $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. L'application *résolvante* $R_{t_0}^{t_1}$ est l'automorphisme de $\mathbb{R}$ qui à x_0 associe la valeur $x(t_1)$ de la solution de l'équation différentielle avec condition initiale (t_0, x_0).

La solution de l'équation différentielle avec condition initiale (t_0, x_0) est donc $t \to R_{t_0}^{t} x_0$.

Exemple 3.3. — Si $A(t)$ est constante, alors $R_{t_0}^{t_1} = \mathrm{e}^{(t_1 - t_0)A}$.

Proposition 3.1. — *Soit $R_{t_0}^{t_1}$ la résolvante de l'équation différentielle $\dot{x} = A(t)x$.*
- $R_{t_0}^{t_0} = \mathrm{Id}$,
- $R_{t_1}^{t_2} \circ R_{t_0}^{t_1} = R_{t_0}^{t_2}$,
- $\dfrac{d}{dt}(\text{dét}\, R_{t_0}^{t}) = \mathrm{tr}\, A(t)\, \text{dét}\, R_{t_0}^{t}$.

La résolvante $R_{t_0}^{t}$ coïncide avec la solution de l'équation différentielle dans $M_n(\mathbb{R})$ avec condition initiale

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t), \quad t \in I, \quad M(t_0) = \mathrm{Id}.$$

Démonstration. — Les deux premières relations résultent de la définition. Vu la seconde relation, il suffit de calculer la dérivée de $\varphi_{t_0} = \text{dét}\, R_{t_0}^{t}$ en $t = t_0$: la dérivée du déterminant est la somme de n déterminants obtenue en remplaçant chaque vecteur colonne par sa dérivée : en $t = t_0$, le i-ème terme de cette somme est donc le déterminant de la matrice différant de la matrice identité par une i-ème colonne égale à $\dot{R}_{t_0}^{t}(e_i) = A(t_0)e_i$ où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique, il vaut donc $a_{ii}(t)$. Ainsi $\varphi'_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) = \mathrm{tr}\, A(t)$.
L'équation différentielle $\dot{M} = AM$ est linéaire : elle admet une solution $M(t), t \in I$ unique pour les conditions initiales $M(t_0) = \mathrm{Id}$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to M(t)x_0$ est solution de l'équation $\dot{x} = Ax$ dans $\mathbb{R}^n$: par unicité c'est donc $R_{t_0}^{t} x_0$, d'où l'égalité $R_{t_0}^{t} = M(t)$. □

L'équation différentielle

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x \tag{7}$$

est équivalente à l'équation différentielle $\dot{X} = A(t)X$ avec $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \ldots & & & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la résolvante $R_{t_0}^{t}$ a comme matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \ldots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

où x_i est la solution de l'équation différentielle (7) avec conditions initiales

$$x_i(t_0) = e_{i1}, \dot{x}_i(t_0) = e_{i2}, \ldots, x_i^{(n-1)}(t_0) = e_{in}.$$

En général, le déterminant $W(t)$ de la matrice $M(t)$ comme dans (8) de n solutions $x_1, \ldots, x_n$ de l'équation différentielle (7) est appelé *wronskien* de ces n solutions. La fonction W vérifie l'équation différentielle scalaire

$$\dot{W} = -a_{n-1}(t)W$$

Ainsi

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds\right).$$

Un wronskien est identiquement nul ou ne s'annule jamais !

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE NON LINÉAIRES

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations

$$\text{(ED)} \qquad \dot{x} = f(t, x).$$

Exemple 4.1. — Soit $\alpha > 1$. L'équation différentielle $\dot{x} = \alpha |x|^{1-\alpha^{-1}}$ a comme solution la fonction nulle ($x(t) = 0$), ainsi que la fonction $x(t) = |t|^\alpha$ si $t \geq 0$ et nulle sinon.

4.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Précisons la condition « localement Lipschitz », dite (LL).

Définition 4.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, A un espace métrique, F une fonction de $A \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^p$. La fonction F est dite localement lipschiztienne en la variable $x \in \Omega$ si pour tout $(a_0, x_0) \in A \times \Omega$, il existe r, δ, C tels que

$$\|f(a, x) - f(a, x')\| \leq C\|x - x'\|, \quad x, x' \in B(x_0, r), a \in B(a_0, \delta).$$

△ Une fonction f admettant des dérivées partielles continues $\partial_{x_i} f, i = 1, \ldots, n$ (*i. e.*de classe C^1 comem il sera vu dans le théorème 1.1 de la seconde partie) vérifie la condition (LL) au voisinage de $x = 0$. La fonction $x \to \sqrt{|x|}$ ne la vérifie pas, vu $\lim_{x \to 0^+} (\sqrt{|2x|} - \sqrt{|x|})/(2x - x) = +\infty$. Il en est de même des fonctions x^β si $\beta \in (0, 1)$, fonctions qui apparaissent dans l'exemple 4.1. ▽

Cette condition de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité locales de la solution de (ED).

Théorème 4.1. — *Soit I un intervalle réel, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport $x \in \Omega$. Alors pour $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $\alpha > 0$ et une unique solution $\gamma : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \Omega$ de (ED) avec les conditions initiales $\gamma(t_0) = x_0$.*

Toute solution de (ED) avec conditions initiales (t_0, x_0) définie sur $J \subset (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ est la restriction de γ à J.

△ Le α peut être précisé : en prenant les constantes r, δ, C de la condition (LL), on impose de plus δ et r assez petits tels que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, r)} \subset I \times \Omega$. Vu la continuité de f et la compacité de $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, r)}$, il existe M tel que $\|f(t, x)\| \leq M$ sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, r)}$. On choisira $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \inf(\delta, r/M, 1/C)$.

Cette condition sur α implique qu'une solution $\gamma(t)$ avec condition initiales (t_0, x_0) reste dans la boule $B(x_0, r)$ pour $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. En effet, l'égalité $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds$ donne

$$\|\gamma(t) - x_0\| = \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \gamma(s))\| ds \right| \leq M\alpha < r.$$

▽

Démonstration. — Elle reprend la démarche du cas linéaire vu au chapitre précédent. Soit $E = E_{t_0, x_0, \alpha, r}$ l'espace des fonctions continues $g : (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \to g(t) \in \overline{B(x_0, r)}$: muni de la distance induite par norme de la convergence uniforme, E (qui n'est pas vectoriel !) est un espace métrique complet. L'équation différentielle avec conditions initiales est équivalente à la recherche du point fixe de la transformation T de E définie pour $x \in E$ par

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(s)) ds, \quad t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha).$$

La transformation T applique bien E dans lui-même :

$$\|Tx(t) - x_0\| \leq \alpha M \leq r, \quad t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$$

et, vu

$$\|Tx - Tx'\| \leq \alpha C \|x - x'\|, \quad x, x' \in E,$$

T est contractante puisque α a été supposé strictement inférieur à C^{-1}. Le point fixe de T est donc la solution cherchée, unique comme l'est le point fixe de T. $\square$

$\triangle$ Remarquons que la constante α donnant une extension minimale à la durée de la solution vaut pour les conditions initiales voisines de (t_0, x_0). On prendra $r' \in (M\alpha, r)$, $x'_0 \in B(x_0, r'-r)$ et t'_0 tel que $(t'_0 - \alpha, t'_0 + \alpha) \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Vu $B(x'_0, r') \subset B(x_0, r)$, on a alors

$$\|f(t,x)\| \leq M, \quad \|f(t,x) - f(t,x')\| \leq C\|x - x'\|,$$

pour $(t,x) \in (t'_0 - \alpha, t'_0 + \alpha) \times B(x'_0, r')$ avec encore la majoration $\alpha < \inf(r'/M, \delta)$. $\triangledown$

On a donc une formulation un peu plus précise du Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 4.2. — *Soit I un intervalle réel, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport $x \in \Omega$. Alors pour $(T_0, m_0) \in I \times \Omega$, il existe $\tau, \rho > 0, \alpha > 0$ tels que, pour tout $(t_0, x_0) \in (T_0 - \tau, T_0 + \tau) \times B(m_0, \rho)$, l'équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$ avec conditions initiales $\gamma(t_0) = x_0$ admette une unique solution $\gamma : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \Omega$.*

4.2. Solutions maximales

Définition 4.2. — $\gamma : J \to \Omega$ est une solution maximale si γ ne se prolonge pas à un intervalle plus grand que J.

Exemple 4.2. — La fonction $x(t) = \mathrm{tg}(t)$ définie sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$ est un solution maximale de $\dot{x} = 1 + x^2$.

Théorème 4.3. — *Sous les mêmes hypothèses que le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute condition initiale, il existe une unique solution maximale.*

Démonstration. — Soient $\gamma_i : J_i \to \Omega, i = 1, 2$ deux solutions maximales.

Supposons tout d'abord que $\gamma_1 = \gamma_2$ sur $J_1 \cap J_2$. Alors, on prend $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 : J_1 \cup J_2 \to \Omega$ qui est un prolongement de γ_1 et de γ_2 : ces deux solutions étant maximales, elle sont égales à γ et donc $\gamma_1 = \gamma_2$.

Ainsi $\gamma_1 \neq \gamma_2$ sur $J_1 \cap J_2$ et il existe $\widetilde{t} \in J_1 \cap J_2$ tel que $\gamma_1\left(\widetilde{t}\right) \neq \gamma_2\left(\widetilde{t}\right)$. Supposons $\widetilde{t} > t_0$. Soit $\theta = \inf_{t > t_0}\{t, \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}$. Pour $t \in [t_0, \theta)$, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ et par continuité $\gamma_1(\theta) = \gamma_2(\theta)$. Par l'unicité donnée par Cauchy-Lipschitz appliqué avec conditions initiales en $(\theta, \gamma_1(\theta))$, on a $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ sur $(\theta - \alpha, \theta + \alpha)$, contredisant que θ soit approché par des t avec $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$. L'unicité de la solution maximale est donc établie.

Pour l'existence de la solution maximale, toutes les solutions prolongeant la solution locale se recollent bien : le recollement de tous ces prolongements donne le le prolongement maximal. $\square$

4.3. Durée de vie des solutions

Pour simplifier, on suppose ici que $\Omega = \mathbb{R}^n, I = \mathbb{R}$ avec les conditions (LL) sur f (localement).

On a un phénomène d'explosion si la solution maximale ne s'étend pas jusqu'en temps infini.

Proposition 4.1. — *Soit $\gamma : J = (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (ED). Si t_+ est fini, alors $\|\gamma(t)\| \to_{t \to t_+} +\infty$.*

Démonstration. — Supposons t_+ fini. On raisonne par l'absurde en supposant que $\|\gamma(t)\|$ ne tende pas vers $+\infty$ lorsque $t \to t_+$. Ainsi il existe un $R > 0$ et une suite (t_k) tendant vers t_+ tel que $\|\gamma(t_k)\| \leq R$. Comme la boule fermée $\overline{B(0,R)}$ est compacte, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\gamma(t_k)$ converge vers a. Appliquant Cauchy-Lipschitz avec conditions initiales (t_+, a), il existe $\alpha > 0, \eta > 0, \rho > 0$ tels que pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in (t_+ - \eta, t_+ + \eta) \times B(a, \rho)$ la solution maximale γ_0 est définie au moins sur $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. En choisissant m assez grand tel que $t_m > t_+ - \eta, t_m + \alpha > t_+$ et $\gamma(t_m) \in B(a, \rho)$, on a une solution maximale γ_0 pour les conditions initiales $(t_m, \gamma(t_m))$ coïncidant avec γ en $(t_m, \gamma(t_m))$: la solution γ_0 a un intervalle de définition contenant $[t_0, t_+) \cap [t_m, t_m + \alpha)$, ainsi γ est prolongeable jusqu'à $t_m + \alpha$ (borne exclue), l'inégalité $t_m + \alpha > t_+$ contredisant la définition de t_+. $\square$

Corollaire 4.1. — *Si $\gamma(J)$ est borné, alors $J = \mathbb{R}$.*

Exemple 4.3. — Modifions l'exemple 2.1 par un terme non linéaire, en prenant f définie par

$$f(z) = \mathrm{i}z + (1 - |z|^2)z, \quad z \in \mathbb{C},$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dont la restriction au cercle $S^1 = \{|z| = 1\}$ coïncide avec le champ linéaire $\ell(z) = \mathrm{i}z$. On a noté par $|z|$ le module du complexe z, qui correspond à la norme euclidienne $\|x(z)\|_2$ du point $x(z)$ de $\mathbb{R}^2$ correspondant au complexe z par l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Une solution γ de $\dot{z} = f(z)$ avec condition initiale

z_0 pour $t = 0$ dans l'intérieur du disque $\{|z| < 1\}$ y reste confinée. Sinon, il existerait t_1 telle $|\gamma(t_1)| = 1$: la solution γ_1 avec conditions initiales $(t_1, \gamma(t_1))$ est de la forme $\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_1)}\gamma(t_1)$ et reste sur le cercle $|z| = 1$ en tout temps : cette solution ne peut provenir de l'intérieur du disque à un instant $t < t_1$. Ainsi, d'après le corollaire 4.1, une solution avec condition initiale dans le disque $\{|z| < 1\}$ reste En fait, la dérivée de $|z(t)|^2$ est

$$2\Re e \langle z(t), \dot{z}(t)\rangle = 2(1 - |z(t)|^2)|z(t)|^2 \tag{9}$$

si bien que, que mises à part le point stationnaire $z = 0$ et le cercle S^1, le module est strictement monotone sur toute trajectoire. Une trajectoire à l'intérieur du cercle a $\mathbb{R}$ comme durée de vie maximale, une à l'extérieur du cercle, dont le module est décroissant, définie sur tout le futur, mais il y a explosion en un temps fini $T_-(|z_0|)$. En effet l'équation différentielle $v' = 2(1 - v)v, v(0) = v_0$ avec $v_0 = |z_0|^2$ vérifiée par $|z(t)|^2$ d'après (9) se résoud explicitement :

$$v(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in \mathbb{R}, & \text{si } v_0 = 0, \\ \dfrac{v_0}{v_0 + (1 - v_0)\mathrm{e}^{-2t}}, \quad t \in \mathbb{R}, & \text{si } 0 < v_0 < 1, \\ 1, \quad t \in \mathbb{R}, & \text{si } v_0 = 1, \\ \dfrac{v_0}{v_0 - (v_0 - 1)\mathrm{e}^{-2t}}, \quad t \in (T_-(v_0), +\infty), & \text{si } v_0 > 1. \end{cases}$$

où $T_-(v_0) = \frac{1}{2}\log(1 - 1/v_0)$. Si z est une solution avec $z_0 \neq 0$, on peut écrire $z(t) = r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ avec $r(t) = |z(t)|$ et la fonction $t \to \theta(t)$ dérivable, vérifiant l'équation différentielle $\dot{\theta} = 1$ d'après

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathrm{i}\dot{\theta}(t)r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} + \dot{r}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} \\ &= \mathrm{i}r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} + (1 - r(t)^2)r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}, \end{aligned}$$

soit $\theta(t) = \theta(z_0) + t$.

4.4. Majoration a priori, inégalité de Grönwall

Proposition 4.2. — *Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$. On considère une solution $\gamma : [t_0, t_1[\to \mathbb{R}^n$ de l'inéquation différentielle*

$$\|\dot{x}\| < g(\|x\|) \tag{ID}$$

et une solution $\rho : [t_0, t_1) \to [0, +\infty)$ de l'équation différentielle

$$\dot{y} = g(y) \tag{ED}$$

telles que $\|\gamma(t_0)\| = \rho(t_0)$. Alors

$$\|\gamma(t)\| < \rho(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

△ La preuve de cette proposition fait un usage crucial de l'inégalité stricte dans la condition (ID), alors que le corollaire suivant (d'usage plus courant) se contente d'une inégalité large dans ses hypothèses. ▽

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde, en supposant la partie $A = \{t \in (t_0, t_1), \|\gamma(t)\| \geq \rho(t)\}$ non vide.La partie A non vide minorée admet une borne inférieure, soit θ, qui vérifie par continuité à droite $\|\gamma(\theta)\| \geq \rho(\theta)$ et l'inégalité inverse par continuité à gauche (à moins que $\theta = t_0$ pour lequel on a aussi l'égalité). L'égalité $\|\gamma(\theta)\| = \rho(\theta)$ implique $\|\dot{\gamma}(\theta)\| < \dot{\rho}(\theta)$. Les développements limités en θ s'écrivent

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma(\theta) + \dot{\gamma}(\theta)(t - \theta) + o(t - \theta) \\ \rho(t) &= \rho(\theta) + \dot{\rho}(\theta)(t - \theta) + o(t - \theta) \end{aligned}$$

Si $\theta = t_0$, pour $t > \theta$

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| &\leq \|\gamma(t_0)\| + \|\dot{\gamma}(t_0)\|(t - t_0) + o(t - t_0) \\ &\leq \rho(t_0) + \dot{\rho}(t_0)(t - t_0) - (\dot{\rho}(t_0) - \|\dot{\gamma}(t_0)\|)(t - t_0) + o(t - t_0) \\ &\leq \rho(t) - [\dot{\rho}(t_0) - \|\dot{\gamma}(t_0)\| + \varepsilon(t - t_0)](t - t_0) < \rho(t) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité, valant pour t assez proche de t_0 vu que $\dot{\rho}(t_0) - \|\dot{\gamma}(t_0)\| > 0$, est contradictoire avec la définition de la partie A et de sa borne inférieure θ.

Sinon, pour $t < \theta$,

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| &\geq \|\gamma(\theta)\| - \|\dot{\gamma}(\theta)\|(\theta - t) + o(t - \theta) \\ &\geq \rho(\theta) - \dot{\rho}(\theta)(\theta - t) + (\dot{\rho}(\theta) - \|\dot{\gamma}(\theta)\|)(\theta - t) + o(t - \theta) \\ &\geq \rho(t) + [\dot{\rho}(\theta) - \|\dot{\gamma}(\theta)\| + \varepsilon(t - \theta)](\theta - t) > \rho(t) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité, valant pour t assez proche de θ vu que $\rho(\theta) - \|\gamma(\theta)\| = g(\|\gamma(\theta)\|) - \|\gamma(\theta)\| > 0$, est contradictoire avec la définition de θ comme borne inférieure de A.

Ainsi, A est vide et la proposition est démontrée. $\square$

Corollaire 4.2. — *Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\|f(t,x)\| \leq a\|x\| + b$ et $x : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$ avec conditions initiales $(t_0, \|x_0\|)$, $t_0 \in (t_-, t_+)$. Alors,*

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{a|t-t_0|} + \frac{b}{a}(e^{a|t-t_0|} - 1), \quad t \in (t_-, t_+).$$

et $t_\pm = \pm\infty$.

Démonstration. — La solution de l'équation différentielle $\dot{y} = ay + b + \varepsilon$ de condition initiale $(t_0, \|x_0\|)$ est

$$\rho_\varepsilon(t) = \|x_0\| e^{a(t-t_0)} + \frac{b+\varepsilon}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a donc, d'après la proposition précédente, $\|x(t)\| < \rho_\varepsilon(t)$ pour $t \in (t_0, t_+)$. On obtient l'inégalité du corollaire pour $t \in [t_0, t_+)$ en faisant tendre ε vers 0. Si $t_+ < +\infty$, la solution serait confinée dans la boule compacte de rayon $\|x_0\| e^{a(t_+-t_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(t_+-t_0)} - 1)$, ce qui ne peut être vu la proposition 4.1.

Pour les temps du passé $t \in (t_-, t_0]$, on renverse le temps en considérant la fonction $y(t) = x(2t_0 - t)$ qui vérifie l'équation différentielle $x' = -f(2t_0 - t, x)$. Ce qui précède donne pour y la majoration

$$\|y(t)\| \leq \|x_0\| e^{a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1), \quad t \in (t_0, 2t_0 - t_-),$$

soit la majoration de l'énoncé sur $x(t)$ pour $t \in (t_-, t_0)$ et $t_- = -\infty$. $\square$

△ Si on suppose $\|f(t,x)\| \leq b$, on a l'estimation

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + b|t - t_0|, \quad t \in (t_-, t_+).$$

obtenue, soit en faisant $a \to 0$ dans le lemme précédent ou en en reprenant la démonstration, avec la résolution de l'équation différentielle scalaire $\dot{y} = b$ pour appliquer la proposition générale 4.2. ▽

4.5. Champs de vecteurs et orbites

Définition 4.3. — Un champ de vecteurs défini sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est toute application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

On supposera dans la suite tout champ de vecteurs régulier de telle manière que Cauchy-Lipschitz s'applique (localement lipschitizien ou de classe C^1). À un champ de vecteur f est associé l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, système autonome suivant la définition 1.2. La proposition suivante permet de ne considérer que les solutions démarrant en $t = 0$.

Proposition 4.3. — *Soit T réel. Si $x : t \in (t_-, t_+) \to \Omega$ est une solution maximale, alors*

$$x_T : t \in (t_- - T, t_+ - T) \to x(t + T)$$

est aussi une solution maximale.

Démonstration. — La fonction x_T est bien définie sur l'intervalle indiqué et vérifie l'équation différentielle : si elle n'était pas maximale, alors $x = (x_T)_{-T}$ ne le serait pas. $\square$

Définition 4.4. — Le champ de vecteurs f est dit *complet* si toute solution de $\dot{x} = f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

△ Le champ $x \in \mathbb{R} \to x^2$ n'est pas complet (cf. exemple 1.2). ▽

Le corollaire 4.2 de l'inégalité de Grönwall énonce que les champs à croissance sous-linéaire sont complets.

Proposition 4.4. — *Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et si $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$, alors le champ de vecteurs f est complet.*

Exemple 4.4. — Le champ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 \cos(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

est complet.

Définition 4.5. — Le flot φ d'un champ de vecteurs complet défini sur $\mathbb{R}^n$ est l'application
$$\varphi : (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \varphi(t,x) \in \mathbb{R}^n$$
où $t\in\mathbb{R}\to\varphi(t,x)$ est la solution de $\dot y = f(y)$ de condition initiale $(0,x)$.
L'orbite $\mathcal{O}_x$ est la partie $\varphi(\mathbb{R},x)$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4.5. — Le flot de $\dot x = Ax$ est donné par $\varphi(t,x) = \mathrm{e}^{tA}x$.

Théorème* 4.4. — *Le flot φ d'un champ complet est continu sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.*

△ Quelle régularité a ce flot, si on impose de la régularité supplémentaire au f de l'équation différentielle ? ▽

Proposition 4.5. — *Soit φ un flot d'un champ complet. Alors*
$$\varphi(t_1+t_2,x) = \varphi(t_1,\varphi(t_2,x)), \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}.$$
Les orbites partitionnent $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Sot $t_2\in\mathbb{R}$. L'égalité $\varphi(t+t_2,x)=\varphi(t,\varphi(t_2,x)), t\in\mathbb{R}$ résulte de l'unicité de la solution de l'équation différentielle avec condition initiale $(0,\varphi(t_2,x))$. Le partitionnement de $\mathbb{R}$ en orbites est privé comme dans le cas linéaire (cf. proposition 2.1). □

Définition 4.6. — Un *point d'équilibre* du flot est un point a tel que $f(a)=0$.

Proposition 4.6. — *Si f vérifie (LL), a est point d'équilibre si et seulement si $\mathcal{O}_a = \{a\}$.*

Démonstration. — Si a est d'équilibre, alors la fonction constante $x(t)=a$ est solution : par unicité, c'est la solution et l'orbite $\mathcal{O}_a$ est $\{a\}$. Réciproquement, si l'orbite $\mathcal{O}_a$ est réduite à $\{a\}$, on a nécessairement $\varphi(t,a)=a, t\in\mathbb{R}$ et $f(a)=\dot\varphi(t,a)$ est nul. □

Exemple 4.6. — Les points d'équilibre du système $\dot x = y, \dot y = -\sin x$ sont les points $a_k = (k\pi,0), k\in\mathbb{Z}$.

Définition 4.7. — Une orbite $\mathcal{O}_a$ est dite *périodique* s'il existe $t_0>0$ tel que $\varphi(t_0,a)=a$.

Proposition 4.7. — *Soit $\mathcal{O}_a$ une orbite périodique avec $f(a)\neq 0$. Alors il existe $T_a>0$ tel que $\varphi(T_a,a)=a$ et $\varphi(t,a)\neq a$ si $t\in(0,T_a)$.*

Démonstration. — Soit $P_+ = \{t>0, \varphi(t,a)=a\}$. Cette partie étant non vide par hypothèse, soit T_a sa borne inférieure. On a $T_a\neq 0$ vu que $\varphi(t,a) = a+tf(a)+o(t-a)$ est distinct de a sur un voisinage de $t=0$ privé de $t=0$. Par la propriété de borne inférieure et continuité du flot, on a $\varphi(T_a,a)=a$. en outre, par la définition de P_+, on a $\varphi(t,a)\neq a$ pour $t\in(0,T_a)$. □

△ On montre aisément que $\{t\in\mathbb{R}, \varphi(t,a)=a\}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$ égal à $T_a\mathbb{Z}$. ▽

Définition 4.8. — La fonction $H:\Omega\to\mathbb{R}$ est une *intégrale première* de l'équation différentielle $\dot x = f(t,x)$ si la fonction $t\to H(x(t))$ est constante en restriction à toute orbite.

Exemple 4.7. — La fonction E définie par $E(x,v) = v^2/2-\cos x$ sur $\mathbb{R}^2$ est une intégrale première du système $x'=v, v'=-\sin x$ associé à l'équation différentielle $\ddot x+\sin x = 0$.