

Liste d'exercices n°3

Chap. 5 : Applications différentiables.

Exercice 1) Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions f définies sur \mathbb{R}^2 par
(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dans le cas (b), on pourra chercher à calculer les dérivées partielles, puis montrer que f n'est pas différentiable.

Exercice 2) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, et $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Étudier la différentiabilité, et déterminer la différentielle première en tout point où elle existe de ces deux fonctions.

b) Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est différentiable et que sa différentielle première en tout point est une similitude.

Exercice 3) a) Soit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, soit $b \in \mathbb{R}^p$ et soit f l'application affine $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $f(x) = A \cdot x + b$. Montrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^n et que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $Df(a) = A$.

b) Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire. Montrer que B est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et pour tout

$$(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, DB((a, b)) : (h, k) \mapsto B(h, b) + B(a, k).$$

c) Montrer que toute application multilinéaire $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_p \rightarrow \mathbb{R}$, est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice 4) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : E \rightarrow E$, (que l'on peut considérer comme une fonction de $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$), définie par $A \mapsto A^2$. Montrer que f est différentiable et de classe \mathcal{C}^1 (et même de classe \mathcal{C}^∞) et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 5) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, (que l'on peut considérer comme une fonction de $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$), définie par $A \mapsto \det(A)$.

a) Montrer que f est différentiable et de classe \mathcal{C}^1 (et même de classe \mathcal{C}^∞).

b) Soit $H \in E$. On considère la fonction $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\gamma(t) = f(I + tH)$. Montrer que γ est dérivable, puis calculer $\dot{\gamma}(0)$ afin d'établir l'égalité $Df(I)(H) = \text{trace}(H)$.

c) Dédire de ce qui précède que l'on a, pour tout couple (M, H) de $E \times E$, $Df(M)(H) = \text{trace}({}^t \text{com}(M)H)$, où $\text{com}(M)$ désigne la comatrice de M . (On peut commencer par prouver le résultat pour M inversible, puis en déduire le résultat pour M non inversible).

d) Soit $A \in E$. En considérant les deux fonctions $\gamma_1(t) = \det(e^{tA})$, et $\gamma_2(t) = e^{t \operatorname{trace}(A)}$, prouver que l'on a $\det(e^A) = e^{\operatorname{trace}(A)}$.

Exercice 6) a) Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , a un point de I et f une fonction continue $I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$ et que $f'(x)$ a une limite finie ℓ quand x tend vers a . Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$.

b) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , a un point de U et f une fonction continue $U \rightarrow \mathbb{R}^p$. On suppose que f est différentiable sur $U \setminus \{a\}$ et que $Df(x)$ admet une limite A dans $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est différentiable en a et que $Df(a) = A$. (On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)$).

Exercice 7) Soit U un ouvert connexe de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable dont la différentielle $Df : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est constante : il existe $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que pour tout $x \in U$, $Df(x) = A$. En considérant la fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x) - A \cdot x$, montrer que f est une application affine.

Exercice 8) a) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrer que si $a \in U$ est un maximum ou un minimum relatif, alors $Df(a) = 0$.

b) Soit U un ouvert borné (non vide) de \mathbb{R}^n . Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \overline{U} , différentiable sur U , et telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{U} \setminus U$. Montrer qu'il existe $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. (Indication : se rappeler qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes).

Ce résultat généralise un théorème bien connu : lequel?