Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
Licence de Maths Classiques, module LC4

Liste d'exercices n°4

Chap. 6 : Théorème d'inversion locale.

Exercice 1) (a) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$. Au voisinage de quels points de $\mathbb{R}^2$ f est-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local ?
(b) Répondre à la question analogue concernant l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $g(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$.

Exercice 2) Soit f une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. A quelle condition f est-elle ouverte (i.e. l'image de tout ouvert est un ouvert)?

Exercice 3) (a) Montrer que l'application $\Psi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^2$- difféomorphisme de $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,,\, x \leq 0\}$.
(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Vérifier que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\,,$$

où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

$$\exists K \in]0,1[,\ \forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq K < 1.$$

On définit alors $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$.
(a) Montrer que g est un C^1-difféomorphisme local.
(b) Montrer que g est injective.
(c) i) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x + f(y) - f(0)| + |y + f(x) - f(0)| \geq (1-K)(|x| + |y|)$. En déduire que si $g(A)$ est borné alors A est borné.
ii) Montrer que l'image de g est fermée.
(d) Montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5) Soit S l'espace vectoriel des matrices (n,n) symétriques réelles, et U l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.
(a) Prouver que U est ouvert dans S.
(b) Prouver que pour tout $A \in U$, il existe un unique $B \in U$ tel que $A = B^2$.
On note $B = \sqrt{A}$.
(c) Prouver que $\phi : U \to U$, $\phi(A) = \sqrt{A}$, est différentiable. (Indication : on pourra considérer l'application réciproque de ϕ et lui appliquer le théorème d'inversion locale).

Chap. 7 : Théorème des fonctions implicites.

Exercice 6) On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^5 + y^3 - 3x^2y - 1$ et on appelle Γ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x,y) = 0$.

Démontrer qu'il existe un voisinage $I \times J$ de $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application φ de I dans J de classe C^1 tels que l'on ait :

$((x,y) \in I \times J, f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in I\ ,\ y = \varphi(x))$.

On admet que φ est de classe C^2. Donnez le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0 et en déduire l'allure de la courbe Γ au voisinage du point $(0,1)$.

Exercice 7) Démontrez qu'il existe un voisinage $I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$ de $(1,1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^4$ et une application $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ de classe C^1 de $I_3 \times I_4$ dans $I_1 \times I_2$ tels que les solutions (x,y,u,v) dans $I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$ du système

$$\begin{cases} x^2 + xu - v^2 - yv = 0 \\ xuv + xyv = 2 \end{cases}$$

soient de la forme $(x = \varphi_1(u,v), y = \varphi_2(u,v), u, v)$. Donner la matrice jacobienne de φ au point $(1,1)$.

Exercice 8) Démontrez que, pour λ réel suffisamment proche de 0, l'équation $x^5 + \lambda x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle x_λ et que l'application $\varphi : \lambda \to x_\lambda$ ainsi définie au voisinage de 0 est de classe C^1. On admet que cette application est de classe C^2. Donnez-en le développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 9) On considère l'ensemble Ω des points (p,q) de $\mathbb{R}^2$ tels que $4p^3 + 27q^2 > 0$ et, pour chaque (p,q) appartenant à Ω, l'équation (E)

$$x^3 + px + q = 0$$

d'inconnue x réelle.

(a) Établir que, si (p,q) appartient à Ω, l'équation (E) admet une unique solution.

(b) On considère alors la fonction φ de Ω dans $\mathbb{R}$ qui au couple (p,q) associe la solution de (E). Montrer que φ est de classe C^1 dans Ω.

On admet que φ est de classe C^2. Donner le développement limité de cette application à l'ordre 2 en $(0,-1)$.