Université de Nantes Année 2003-2004
Département de Mathématiques Licence de Maths Classiques, module LC4

Liste d'exercices n°5

Chap. 8 : Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1) Pour λ réel, on considère l'ensemble

$$S_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2 - y^2 - z^2 = \lambda\} \, .$$

a) Montrer que si $\lambda \neq 0$, S_λ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Dessiner S_λ. Donner l'équation du plan tangent affine en un point de S_λ.
b) Dessiner S_0. Montrer que $S_0 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'en revanche S_0 n'est pas une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Indication : si c'était le cas, montrer que l'ensemble des vecteurs-vitesse au temps 0 des courbes $\mathcal{C}^1$ tracées sur S_0 et passant par $(0, 0, 0)$ au temps 0, contiendrait 3 vecteurs linéairement indépendants, (considérer les chemins $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_1(t) = (t, t, 0)$, $\gamma_2(t) = (t, 0, t)$, $\gamma_3(t) = (\sqrt{2}\, t, t, t)$).

Exercice 2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x, y, z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ f_2(x, y, z) & = & x^2 + y^2 - x \end{array} \right.$$

Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.
a) Dessiner C.
b) Montrer qu'en dehors du point $(1, 0, 0)$, C est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$.
c) En considérant les deux chemins $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ $\gamma_1(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t)$, $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, -\cos t \sin t, \sin t)$, montrer qu' "à cause du point $(1, 0, 0)$", C n'est pas une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$.

Chap. 9 : Applications $\mathcal{C}^k$ et extrema.

Exercice 3) Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$.
a) Dire brièvement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Pour tout x de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, déterminer $Df(x)$ et $D^2 f(x)$.

Exercice 4) Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$. On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(A) = \mathrm{trace}\,({}^t A\, A) \, .$$

a) Dire brièvement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Pour tout $A \in E$, déterminer $Df(A)$ et $D^2 f(A)$.

Exercice 5) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver qu'il existe des fonctions continues $f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x)\, x_i x_j\,.$$

Exercice 6) Pour tout λ réel, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x, y) = x^3 + xy + \lambda\, y^2 + y^3\,.$$

Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f et discuter la nature de ce point critique suivant les valeurs du paramètre λ.

Exercice 7) Pour tout λ réel, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x, y) = x^3 + y^3 - 3\,\lambda\, xy\,.$$

Etudier les extrema de f_λ suivant les valeurs du paramètre λ.

Exercice 8) Soient a, b, c des réels tels que $0 < c < b < a$ et soit
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\}$.
a) Montrer que S est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.
b) Soit f la fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.
i) Montrer que la restriction de f à S est bornée inférieurement et que la borne inférieure est atteinte en au moins un point de S. Justifier qu'un tel point est un point critique de $f_{|S}$.
ii) Déterminer les points critiques de $f_{|S}$.
iii) En déduire la distance de S à l'origine.

Exercice 9) Soit f la fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2\, y^2\, z^2$.
Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$.
a) Montrer que S est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.
b) Montrer que la restriction de f à $\overline{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, est bornée supérieurement et que la borne supérieure est atteinte en un point qui est nécessairement dans S. Justifier qu'en un tel point est un point critique de $f_{|S}$.
c) Déterminer les points critiques de $f_{|S}$.
d) En déduire le maximum de la restriction de f à S.
e) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout triplet (a, b, c) de réels strictement positifs, on a :

$$(a^2\, b^2\, c^2)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\,(a^2 + b^2 + c^2)\,.$$