1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x \sin y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1.a Déterminer les points critiques de f.
1.b Calculer la matrice hessienne de f.
1.c La fonction f admet-elle des minima ou des maxima locaux ?
1.d En traçant quelques courbes représentatives, représenter l'allure des ensembles de niveau de f. Ces ensembles sont-ils des courbes régulières ?

2. On considère le champ de vecteurs V sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$V(x,y) = (\sin y, x \cos y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2.a Résoudre l'équation différentielle $(\dot{x}, \dot{y}) = V(x,y)$ avec conditions initiales $(x_0, y_0) = (-\pi/2, \pi/2)$.
2.b Soit $t \in]a,b[\to (x(t), y(t))$ une solution de l'équation différentielle

$$(\dot{x}, \dot{y}) = V(x,y).$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$|x(t)| \leq C + |t|, \quad |y(t)| \leq C(1+t^2), \quad t \in]a,b[.$$

En déduire que le champ de vecteurs V est complet.
2.c Montrer que l'ensemble des points d'équilibre de V est égal à

$$\{m_k = (0, k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.d Calculer la différentielle de l'application V.
2.e Étudier le linéarisé de V au point d'équilibre $m_1 = (0, \pi)$.
2.f Sur une même figure, tracer les points d'équilibre, les isoclines horizontales et verticales, ainsi que quelques orbites du champ V. On rappelle que, V étant un champ sur U donné par $V(m) = (X(m), Y(m)), m \in U$, la courbe $\mathcal{C} \subset U$ est une isocline du champ V pour la pente μ si on a $Y(m) = \mu X(m)$ pour $m \in \mathcal{C}$.
2.g Quel est le lien entre le champ de vecteurs V et la fonction f ? Discuter les rapports entre les figures des questions 1.d et 2.f