Faculté des sciences et techniques
Département de mathématiques

Licence de Mathématiques

Filière Mathématiques classiques

Calcul différentiel

III. Quelques retours

Laurent Guillopé

www.math.sciences.univ-nantes.fr/˜guillope/LC4

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

RETOUR À L'EXPONENTIELLE

Lemme 1.1. — *Soit M_n l'espace des matrices carrées d'ordre n et P_n l'application définie sur M_n^2 et à valeurs dans M_n telle que $P_n(A,B) = BA, A, B \in M_n$. L'application P_n est indéfiniment différentiable, avec différentielle troisième nulle.*

Pareillement, l'application $\Pi_{n,k} : A \in M_n \to M^k \in M_n$ est indéfiniment différentiable, avec comme différentielle

$$D\Pi_{n,k}(M)(H) = \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell H M^{k-1-\ell}, \quad H \in M_n.$$

Démonstration. — Les fonctions coordonnées de P_n sont des fonctions polynomiales de degré deux des variables (a_{ij}, b_{ij}). Ainsi, l'application P_n est C^∞, avec la différentielle troisième (exprimable en les dérivées partielles d'ordre trois) nulle.

Précisons les dérivées de P_n. En écrivant

$$P_n(A+H, B+K) = (B+K)(A+H) = BA + BH + KA + KH$$

on obtient la différentielle $DP_n(A,B)$ comme définie par

$$DP_n(A,B)(H,K) = BH + KA$$

On remarque que l'application $(A,B) \in M_n^2 \to DP_n(A,B) \in L(M_n^2, M_n)$ est linéaire. Ainsi la différentielle seconde $D^2P_n = D(DP_n)$, application de M_n^2 dans $L(M_n^2, L(M_n^2, M_n))$, est constante avec $D(DP_n)(A,B) = DP_n$. On en déduit $D^3(P_n)$ nul.

Pour le calcul de la différentielle de $\Pi_{n,k}$, on isole les termes contenant le seul facteur H dans le développement de $\Pi_{n,k}(M+H) = (M+H)^k$

$$(M+H)^k = M^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell H M^{k-1-\ell} + R_k(M,H)$$

où chaque terme de la somme $R_k(M,H)$ contient au moins deux fois le facteur H, de telle sorte que $R_k(M,H) = O(\|H\|^2) = o(\|H\|)$. L'expression de $D\Pi_{n,k}$ en résulte. □

Lemme 1.2. — *La fonction* exp *est différentiable et* $D(\exp)(0) = \mathrm{Id}$.

Démonstration. — Reprenons la définition de l'exponentielle matricielle sur M_n :

$$\exp(M+H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M+H)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k + D\Pi_{n,k}(M)(H) + R_k(M,H)}{k!} \tag{1}$$

$$= \exp(M) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D\Pi_{n,k}(M)(H)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k(M,H)}{k!}$$

Chaque terme $R_k(M,H)$ est une somme de produits des matrices M et K, majorés en norme par la somme de termes $R_k(\|M\|, \|H\|)$ où on a remplacé dans l'expression polynomiale (non commutative) $R_k(H,M)$ les facteur M et H par leurs normes, obtenant ainsi les termes de reste dans le développement (1) pour l'application exponentielle scalaire. Ainsi la somme correspondante $\sum_{k=0}^{\infty} R_k(\|M\|, \|H\|)/k!$ est exactement égale à

$$\mathrm{e}^{\|M\|+\|H\|} - \mathrm{e}^{\|M\|} - \sum_{k=0}^{\infty} D\Pi_{1,k}(\|M\|)(\|H\|) = \mathrm{e}^{\|M\|+\|H\|} - \mathrm{e}^{\|M\|} - \mathrm{e}^{\|M\|}\|H\| = o(\|H\|)$$

La somme $L(M)(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D\Pi_{n,k}(M)(H)}{k!}$ est majorée en norme par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pi_{1,k}(\|M\|)(\|H\|)}{k!} = \mathrm{e}^{\|M\|}\|H\|$ et est une fonction linéaire de H. Ainsi

$$\exp(M+H) = \exp(M) + L(M)(H) + o(\|H\|),$$

ce qui achève de montrer la différentiabilité de l'application exponentielle. Pour $M = 0$, les termes $D\Pi_{n,k}(0)$ sont tous nuls, sauf pour $k = 0$, ce qui donne $D(\exp)(0) = \mathrm{Id}$. □

On admet ici (on utilisera dans la preuve de la proposition suivante seulement la différentiabilité à l'ordre 2)

Théorème 1.1. — *La fonction exponentielle sur l'espace des matrices carrées d'ordre n est indéfiniment différentiable.*

Définition 1.1. — Soit A une matrice de $GL(n)$. On désigne par $\mathrm{Ad}(A)$ l'application linéaire de M_n définie par $\mathrm{Ad}(A)(M) = AMA^{-1}$.

Soit B une matrice de M_n. On désigne par $\mathrm{ad}(B)$ l'application linéaire de M_n définie par $\mathrm{ad}(B)(M) = [B, M] = BM - MB$.

Les applications Ad et ad sont indéfiniment différentiables.

Proposition 1.1. — *Pour B dans M_n, on a $\exp(\mathrm{ad}(B)) = \mathrm{Ad}(\exp(B))$.*

△ L'exponentielle de $\exp(\mathrm{ad}(B))$ est celle dans l'espace $\mathrm{End}(M_n)$ d'endomorphismes de M_n, alors que celle du membre de droite est l'exponentielle définie sur $M_n(\simeq \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. ▽

Démonstration. — On va montrer en fait $\exp(t\,\mathrm{ad}(B)) = \mathrm{Ad}(\exp(tB))$ pour tout t réel. L'application $\varphi(t) = \exp(t\,\mathrm{ad}(B))$, valant Id en $t = 0$ est dérivable, de dérivée $\varphi'(t) = \mathrm{ad}(B)\exp(t\,\mathrm{ad}(B)) = \mathrm{ad}(B)\varphi(t)$.

Soit $\psi(t) = \mathrm{Ad}(\exp(tB))$. Vu que $\mathrm{Ad}(A_1A_2) = \mathrm{Ad}(A_1)\,\mathrm{Ad}(A_2)$ et $\exp((s+t)B) = \exp(sB)\exp(tB)$, on a $\psi(s+t) = \psi(s)\psi(t)$. Vu la différentiabilité des applications Ad et exp, l'application ψ est dérivable, avec $\psi'(0) = \mathrm{ad}(B)$ vu

$$\psi(t)(M) = \exp(tB)M\exp(-tB) = (1+tB+o(t))M(1-tB+o(t)) = M+t(BM-MB)+o(t),$$

et vérifie la relation différentielle

$$\psi'(s+t) = \psi'(s)\psi(t).$$

soit pour $s = 0$, $\psi'(t) = \psi'(0)\psi(t) = \mathrm{ad}(B)\psi(t)$. Ainsi, ψ, comme φ, vérifie dans $\mathrm{End}(M_n)$ l'équation différentielle $\dot{x}(t) = \mathrm{ad}(B)x(t)$ avec condition initiale $x(0) = 1$. Les deux fonctions φ et ψ coïncident donc. □

Proposition 1.2. — *La différentielle $D(\exp)(M)$ est donnée par*

$$D(\exp)(M) = \exp(M)\frac{1-\exp(-t\,\mathrm{ad}(M))}{\mathrm{ad}(M)}.$$

où $(\exp(L)-1)/L$ est défini par

$$\frac{\exp(L)-1}{L} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{(k+1)!}, \quad L \in \mathrm{End}(M_n).$$

△ Si H commute avec M, on a donc $D(\exp)(M)(H) = e^{M}H$, ce qui est bien connu pour l'exponentielle scalaire. ▽

Démonstration. — Soit M une matrice de M_n et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(M_n)$ définie par $\Phi(s) = sD(\exp)(sM)$. En différentiant par rapport à M la relation $\exp((s+t)M) = \exp(sM)\exp(tM)$, on obtient

$$(s+t)D(\exp)((s+t)M) = sD(\exp)(sM)\exp(tM) + \exp(sM)tD(\exp)(tM)$$

soit

$$\Phi(s+t) = \Phi(s)\exp(tM) + \exp(sM)\Phi(t),$$

où $\exp(tM)$ et $\exp(sM)$ désignent les opérateurs de multiplication par $\exp(tM)$ et $\exp(sM)$ resp. dans M_n. L'application Φ est dérivable, ainsi en dérivant la relation précédente par rapport à s

$$\Phi'(s+t) = \Phi'(s)\exp(tM) + \exp(sM)M\Phi(t)$$

et prenant en $s = 0$

$$\Phi'(t) = \Phi'(0)\exp(tM) + M\Phi(t).$$

La fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(M_n)$ vérifie l'équation différentielle linéaire $\dot{x} = Mx + \Phi'(0)e^{tM}$ avec second membre, dont l'équation différentielle homogène associée $\dot{x} = Mx$ a comme solution $\exp(tM)\Lambda_0$ pour un $\Lambda_0 \in \mathrm{End}(M_n)$. En posant $\Phi(t) = \exp(tM)\Lambda(t)$, on obtient pour la fonction Λ la relation différentielle

$$\exp(tM)\Lambda'(t) = \Phi'(0)\exp(tM),$$

soit

$$\Lambda'(t) = \exp(-tM)\Phi'(0)\exp(tM) = \mathrm{Ad}(\exp(-tM))\Phi'(0) = \exp(-t\,\mathrm{ad}(M))\Phi'(0).$$

Vu $\Lambda(0) = \Phi(0) = 0$, on a donc

$$\Lambda(t) = \int_0^t \exp(-u\,\mathrm{ad}(M))du\Phi'(0) = \frac{1-\exp(-t\,\mathrm{ad}(M))}{\mathrm{ad}(M)}\Phi'(0),$$

où la dernière égalité s'obtient en comparant les dérivées des deux membres. On a en outre

$$\Phi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} D(\exp)(tM) = D(\exp)(0) = \mathrm{Id}\,.$$

On en déduit le résultat annoncé. □

CHAPITRE 2

RETOUR AUX CHAMPS DE VECTEURS

Au champ de vecteurs $X : m \in U(\subset \mathbb{R}^n) \to X(m) \in \mathbb{R}^n$ est associé l'équation différentielle

(2) $$\dot{x} = X(x).$$

Toute équation différentielle du premier ordre est de ce type (dit autonome), à condition d'introduire une dimension de phase supplémentaire : l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

avec condition initiale $x(t_0) = x_0$ est équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \dot{x} = f(s, x) \end{cases}$$

avec conditions initiales $s(t_0) = t_0, x(t_0) = x$. Nous nous intéressons ici exclusivement aux systèmes autonomes.

On supposera dans la suite que le champ est C^k, avec k au moins égal à 1 : ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution maximale définie sur $(t_{\min}, t_{\max})$. Le champ est dit complet si la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ce cas, on note $\varphi_t(m)$ la solution de (2) avec conditions initiales $x(t_0) = m_0$. Pour simplifier, on supposera le champ complet et pour les résultats locaux au voisinage de m_0, on prendra le champ défini sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, nul en dehors d'une boule $B(m_0, \alpha)$, $\alpha > 0$ (ce qu'on obtient à partir d'un champ défini au voisinage de m_0 en multipliant par une fonction lisse à support borné et valant 1 au voisinage de m_0 : de telle fonction tronquante existe à profusion).

On admet ici le théorème suivant de dépendance lisse par rapport aux conditions initiales et au temps.

Théorème* ***2.1**. — *Soit X un champ de vecteurs sur U complet de classe C^1. Alors le flot $(t, x) \in \mathbb{R} \times U \to U$ est de classe C^1.*

***Lemme 2.1**. — *La transformation φ_t est un difféomorphisme de U.*

On a $D_m\varphi_t(m)[X(m)] = X(\varphi_t(m))$.

Démonstration. — On a vu que le flot vérifiait

$$\varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t. \tag{3}$$

Ainsi φ_t est bijective de U dans U, d'inverse φ_{-t}. D'après le théorème précédent, φ_t et φ_{-t} sont différentiables, ainsi φ_t est un difféomorphisme.

Dérivant par rapport à s la relation $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

$$X(\varphi_{t+s}(m)) = \frac{d\varphi_{t+s}(m)}{dt} = D_m\varphi_t(\varphi_s(m)) \left[\frac{d\varphi_s}{ds}(m)\right] = D_m\varphi_t(\varphi_s(m))X(\varphi_s(m))$$

et évaluant en $s = 0$, on obtient

$$X(\varphi_t(m)) = D_m\varphi_t(m)(X(m)).$$

2.1. Changement de variable

Soit Φ un difféomorphisme de U sur $V = \Phi(U)$ et X un champ de vecteurs sur U. Le difféomorphisme Φ transporte le portrait de phase sur U associé au champ X sur un ensemble de courbes dans $V = \Phi(U)$, qui se révèle être le portrait de phase d'un champ de vecteurs Y sur V.

***Définition/Proposition 2.1**. — Soit Φ un difféomorphisme de U sur V de classe C^2 et X un champ de vecteurs C^1 sur U. Le champ de vecteurs Φ_*X sur V est défini par

$$\Phi_*X(y) = D\Phi(\Phi^{-1}(y))(X(\Phi^{-1}(y))), \quad y \in V.$$

Si $t \in I \to x(t)$ est une solution de $\dot{x} = X(x)$, alors $t \in I \to \Phi(x(t))$ est une solution de $\dot{y} = \Phi_*(X)(y))$.

△ En utilisant les formules de différentiation de fonctions composées, on constate que l'hypothèse C^2 pour Φ est importante pour pouvoir assurer que $\Phi_* X$ est de classe C^1. Par ailleurs, on remarque $(\Phi \circ \Psi)_* = \Phi_* \circ \Psi_*$ où Φ_* désigne la transformation qui au champ de vecteurs X sur U associe le champ de vecteurs $\Phi_* X$ sur $V = \Phi(U)$. ▽

Démonstration. — On dérive par rapport à t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(x(t)) &= D\Phi(x(t))\dot{x}(t) = D\Phi(x(t))X(x(t)) \\ &= D\Phi(\Phi^{-1}(\Phi(x(t)))X(\Phi^{-1}(\Phi(x(t))) = \Phi_* X(\Phi(x(t)).\end{aligned}$$ □

Exemple 2.1. — Soit $\Phi : (x,y) \in (R_*^+)^2 \to (p = \log x, q = \log y) \in \mathbb{R}^2$ et X le champ de Lotka-Volterra $X(x,y) = (ax - bxy, cxy - dy)$. Alors, si $(p,q) = \Phi(x,y)$,

$$\Phi_* X(p,q) = D\Phi(x,y)[X(x,y)] = \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1/y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy - dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by \\ cx - d \end{pmatrix} = (a - b\mathrm{e}^q, c\mathrm{e}^p - d)$$

On remarque, que si H est la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$H(p,q) = -aq + b\mathrm{e}^q + c\mathrm{e}^p - dp, \quad (p,q) \in \mathbb{R}^2,$$

alors le champ $\Phi_* X$ vérifie

$$\Phi_* X(p,q) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}(p,q), \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)\right), \tag{4}$$

ce qui explique facilement pourquoi H est une intégrale de première de $\Phi_* X$: pour une solution $(p(t), q(t))$

$$\frac{d}{dt}H(p(t), q(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)\dot{p}(t) + \frac{\partial H}{\partial q}(p,q)\dot{q}(t) = 0.$$

Que $H \circ \Phi$ soit une intégrale de X a été vérifié par un calcul aisé, mais n'a pas d'explication aussi simple que pour H relativement à $\Phi_* X$.

Un autre exemple est donné par les coordonnées polaires, qui constituent un changement local de variable : Φ transforme les coordonnées cartésiennes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (ou $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$) en les coordonnées polaires $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. On a vu précédemment que si z est solution de $\dot{z} = \mathrm{i}z + (1 - |z|^2)z$, alors le module $r = |z|$ (resp. l'argument θ) vérifie l'équation différentielle $\dot{r} = r(1 - r^2)$ (resp. $\dot{\theta} = 1$). En fait, le couple (r,θ) est solution du champ de vecteurs $\Phi_* z$. En effet,

$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/(x^2 + y^2) & x/(x^2 + y^2] \end{pmatrix}$$

et on vérifie que

$$D\Phi(x,y)X(x,y)_{|x+\mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = (r(1 - r^2), 1).$$ □

***Théorème 2.2* (Théorème de redressement).** — *Soit X un champ de classe C^2 et m_0 tel que $X(m_0)$ soit non nul. Alors il existe un difféomorphisme Φ défini au voisinage de m_0 tel que $\Phi_* X$ soit un champ constant.*

△ Les solutions du champ constant $X(m) = v$ sont données par $x(t) = v(t - t_0) + x_0$: le portrait de phase est constitué de droites parallèles. ▽

Démonstration. — Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tel que $H \oplus \mathbb{R}X(m_0) = \mathbb{R}^n$; on identifiera H à un espace $\mathbb{R}^{n-1}$, avec $(h,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ comme coordonnées. On introduit la transformation

Ψ de $H \oplus \mathbb{R}X(m_0)$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\Psi(h,t) = \varphi_t(h)$ pour $(h,t) \in H \oplus \mathbb{R}X(m_0)$. D'après le théorème 2.1, la transformation Ψ est de classe C^1. De plus, vu

$$D\Psi(m_0,0)(h,0) = \frac{d}{dt}\Psi(m_0+th,0)_{|t=0} = \frac{d\varphi_0(m_0+th)}{dt}_{|t=0} = \frac{d(m_0+th)}{dt}_{|t=0} = h,$$

$$D\Psi(m_0,0)(0,1) = \frac{d}{dt}\Psi(m_0,t)_{|t=0} = \frac{d\varphi_t(m_0)}{dt}_{|t=0} = X(m_0),$$

l'image de $D\Psi(m_0,0)$ contient les deux sous-espaces H et $\mathbb{R}X(m_0)$ supplémentaires de $\mathbb{R}^n$. La différentielle $D\Psi(m_0,0)$ est surjective et donc un isomorphisme de $H \oplus \mathbb{R}X(m_0)$ sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, Ψ est un difféomorphisme d'un voisinage U de $(h=0, t=0)$ sur un voisinage de m_0, avec, si Y désigne le champ constant $(0,1)$ sur $H \times \mathbb{R}X(m_0)$

$$\begin{aligned}\Psi_*Y(\varphi_t(h)) &= D\Psi(h,t)Y(h,t) = D\Psi(h,t)(0,1) = D\Psi(h,t)\left[\frac{d}{ds}(0,s)_{|s=0}\right]\\ &= \frac{d}{ds}\Psi(h,t+s)_{|s=0} = \frac{d}{ds}\varphi_{t+s}(h)_{|s=0} = X(\varphi_t(h)),\end{aligned}$$

soit, avec $\Phi = \Psi^{-1}$,

$$\Phi_*X = Y. \qquad \square$$

Exemple 2.2. — Soit σ une transformation de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs tel que $\sigma_*X = \pm X$. Ainsi, si $t \to \gamma(t)$ est une solution de $\dot{x} = X(x)$, alors $t \to \theta(t) = \sigma(\gamma(t))$ est une solution de $\dot{y} = \pm X(y)$. Dans le cas où θ est solution de $\dot{y} = -X(y)$, en renversant le temps, *i. e.* en prenant $\widetilde{\theta}(t) = \theta(-t)$, on obtient une solution de $\dot{x} = X(x)$. Ainsi, un champ X invariant au signe près sous l'action de σ a un portait de phase invariant sous l'action de σ : si $\mathcal{O}$ est une orbite du champ X, $\sigma(\mathcal{O})$ en est aussi une.

Par exemple, le pendule mathématique $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$ est associé au champ $X(x,y) = (y, -\sin x)$ antiinvariant par la symétrie σ par rapport à l'axe horizontal

$$\sigma_*X(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\ -\sin x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\ \sin x\end{pmatrix} = -X(x,y)$$

2.2. Points d'équilibre

Le point m_0 est un point d'équilibre du champ de vecteurs X si $X(m_0) = 0$.

Exemple 2.3. — Soit f différentiable. Le champ $X = \operatorname{grad} f$ a comme points d'équilibre les points critiques de f.

Si le champ X est C^1, le développement limité de X au voisinage d'un point d'équilibre m_0

$$X(m) = DX(m_0)(m-m_0) + o(\|m-m_0\|)$$

incite à examiner le champ X au premier ordre au voisinage de m_0.

Définition 2.1. — Si m_0 est un point d'équilibre de X, le champ linéarisé de X en m_0 est le champ linéaire X_ℓ défini par $X_\ell(u) = DX(m_0)u, u \in \mathbb{R}^n$. L'équation linéarisée de l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$ est l'équation

$$\dot{u} = DX(m_0)u.$$

Théorème* 2.3. — *Soit m_0 un point d'équilibre du champ X de classe C^1. Si $DX(m_0)$ n'a pas de valeur propre purement imaginaire, le portrait de phase du champ X au voisinage de m_0 "ressemble" à celui du champ linéarisé $DX(m_0)$: il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de m_0 tel que $\Phi_*X = DX(m_0)$; le difféomorphisme Φ transporte le portrait de phase de X au voisinage de m_0 sur celui de $DX(m_0)$ au voisinage de $u = 0$.*

Exemple 2.4. Le pendule mathématique avec frottement est modélisé par

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\sin x - ky \end{cases} \tag{5}$$

On a étudié le cas $k=0$, pour lequel $H(x,y)=y^2/2-\cos x$ est une intégrale première (le système est du type $(\dot x,\dot y)=(\partial_y H(x,y),-\partial_x H(x,y))$ comme le système (4) de Lotka-Volterra en coordonnées (p,q)).

Le linéarisé de (5) au point d'équilibre $m_0=(0,0)$ est

$$\begin{cases} \dot u_1 = u_2 \\ \dot u_2 = -u_1 - ku_2 \end{cases}$$

avec comme valeurs propres $(-k\pm\sqrt{k^2-4})/2$. Si $0<k<2$, le champ X a au voisinage de $m_0=(0,0)$ des trajectoires spiralant vers m_0 lorsque $t\to+\infty$.

Le linéarisé de (5) au point d'équilibre $m_0=(\pi,0)$ est

$$\begin{cases} \dot u_1 = u_2 \\ \dot u_2 = u_1 - ku_2 \end{cases}$$

avec comme valeurs propres $(-k\pm\sqrt{k^2+4})/2$. Le champ X au voisinage de $(0,0)$ a deux trajectoires convergent vers m_0, deux s'en éloignant et les autres dans la configuration en col.

Théorème * ***2.4.*** — *Si toutes les valeurs propres de $DX(m_0)$ sont de partie réelles strictement négatives, le point d'équilibre m_0 est asymptotiquement stable,* i. e. *pour tout ε, il existe $\delta>0$ tel que si m est dans la boule $B(m_0,\delta)$, la trajectoire $(\varphi_t(m),t\geq 0)$ est incluse dans la boule $B(m_0,\varepsilon)$ et $\lim_{t\to+\infty}\varphi_t(m)=m_0$.*

Invoquant le théorème 2.3, il suffit de démontrer la stabilité asymptotique pour les champs linéaires à valeurs propres toutes de partie réelle strictement négative, stabilité asymptotique qui résulte des formes normales de telles matrices. On peut reprendre ce théorème en établissant l'existence de fonctions dites *de Liapounov*.

Proposition * ***2.1.*** — *Soit m_0 un point d'équilibre du champ X de classe C^1 avec toutes les valeurs propres du champ linéarisé $DX(m_0)$ à partie réelle strictement négative. Il existe une fonction L définie sur un voisinage U de m_0 et des constantes $C,\gamma>0$ telles que pour $m\in U$, $L(m)>C||m-m_0||^2$ et $L(\varphi_t(m))=O(\mathrm{e}^{-\gamma t}), t\geq 0$.*

On va se contenter de donner une fonction de Liapounov pour un système linéaire $\dot u=Au$ avec A de rang 2 à spectre inclus dans $\Re e\, z<0$. Si A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), on considère une base (v_1,v_2) de vecteurs propres, avec valeurs propres λ_1,λ_2 respectives. Si A n'est pas diagonalisable, il existe une base (w_1,w_2) telle que w_1 est un vecteur propre de valeur propre λ et $Aw_2=w_1+\lambda w_2$. En prenant $v_1=\eta^{-1}w_1$ et $v_2=w_2$, on a une base (v_1,v_2) telle que $Av_1=\lambda v_1, Av_2=\eta v_1+\lambda v_2$. on pose alors $L(m)=|x_1|^2+|x_2|^2$ où $m=x_1v_1+x_2v_2$.

Si A est diagonalisable, avec $\gamma=-\max(\Re e\,\lambda_1,\Re e\,\lambda_2)$, on a

$$L(\mathrm{e}^{tA}m)=|\mathrm{e}^{t\lambda_1}x_1|^2+|\mathrm{e}^{t\lambda_2}x_2|^2\leq \mathrm{e}^{-t\gamma}(|x_1|^2+|x_2|^2)=\mathrm{e}^{-t\gamma}L(m),\quad t\geq 0,$$

alors que si A n'est pas diagonalisable, avec $\gamma=-\Re e\,\lambda$,

$$L(\mathrm{e}^{tA}m)=|\mathrm{e}^{\lambda t}(x_1+t\eta x_2)|^2+|\mathrm{e}^{\lambda t}(\eta x_2)|^2\leq \mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{t>0}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}(|x_1+t\eta x_2|^2+|x_2|^2),$$

pour une constante C convenable, $\gamma=-\lambda+\varepsilon$ et en ayant pris $\varepsilon>0$ suffisamment petit.

2.3. Champs de gradient

Si h est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, rappelons que le gradient de h est le champ de vecteur $\nabla h = \operatorname{grad} h$ défini sur U tel que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$

$$Dh(m)(v) = \langle \nabla h(m), v \rangle, \quad m \in U.$$

Lemme 2.2. — *Les points critiques de h coïncident avec les points d'équilibre du gradient ∇h. En un point d'équilibre m_0 de ∇h, le champ linéarisé est donné par la matrice hessienne de la fonction h.*

La fonction h est strictement croissante le long de toute trajectoire issue d'un point non critique pour h.

Démonstration. — Le champ linéarisé est donné par $D\nabla h(m_0)$: la matrice jacobienne $\operatorname{Jac} \nabla h$ est constituée des dérivées partielles $\partial_{x_i}\partial_{x_j} h$: c'est la hessienne $\operatorname{Hess} h(m_0)$.

Pour une trajectoire γ de l'équation différentielle $\dot{x} = \nabla h(x)$, la dérivée

$$\frac{d[h(\gamma(t))]}{dt} = Dh(\dot{\gamma}(t)) = \langle \nabla h(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \|\nabla h(\gamma(t))\|^2$$

est strictement positive le long d'une trajectoire ne passant pas par un point d'équilibre. □

△ Soit m_0 un point critique de h avec $\operatorname{Hess} h(m_0)$ de rang maximum. Alors la matrice $\operatorname{Hess} h(m_0)$, qui est symétrique, a des valeurs propres non nulles : le portait de phase du champ de gradient ∇h au voisinage de m_0 est, à difféomorphisme près, celui du champ linéaire constant donné par $\operatorname{Hess} h(m_0)$, *i. e.* de l'équation différentielle $\dot{v} = \operatorname{Hess} h(m_0) v$ au voisinage de $v = 0$. ▽

Proposition 2.2. — *Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\Delta = \{h \geq 0\}$ est compact, la partie $\{h = 0\}$ est une courbe régulière et Δ ne contient qu'un nombre fini de points critiques.*

Alors toute solution maximale $\gamma : t \in (T_{\min}, T_{\max}) \to \gamma(t)$ de $\dot{x} = \nabla h$ avec conditions initiales dans Δ satisfait $T_{\max} = +\infty$.

Toute trajectoire $(\gamma(t))_{t \geq 0}$ avec $\gamma(0)$ dans Δ converge vers un des points critiques de f dans Δ.

Exemple 2.5. — Soit h la fonction définie sur le plan par

$$h(x, y) = 10 - (x(1-x))^2 - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vu que $h(m) \to -\infty$ lorsque $m \to \infty$, la partie $\Delta = \{h \geq 0\}$ est compacte. La fonction h a pour gradient

$$\nabla h(x, y) = (-2x(1-x)(1-2x), -2y)$$

et hessienne

$$\operatorname{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2(1 + 6x(x-1)) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les points critiques de h sont $m_0 = (0,0), m_{1/2} = (1/2, 0), m_1 = (1, 0)$, avec hessienne d'indice 2,1,2 et valeurs de h égales à $10, 159/160, 10$ resp. Les points m_0 et m_1 sont des maximaux globaux, stricts à leur voisinage, alors que $m_{1/2}$ est un point col.

La partie $\mathcal{L}_{h_0} = \{h = h_0\}$ est une courbe régulière, sauf pour $h_0 = 10$, pour lequel $\mathcal{L}_{10}$ est réduit aux deux maximaux de h et $h_0 = 159/160$ où $\mathcal{L}_{159/160}$ contient le point critique $m_{1/2}$: d'après le lemme de Morse 3.1 ci-après, au voisinage de $m_{1/2}$, le niveau $\mathcal{L}_{159/160}$ est l'image de deux segments de droites transverses par un difféomorphisme et les courbes $\mathcal{L}_{159/160+\varepsilon}$, avec ε non nul petit, des portions d'hyperboles. Les courbes $\mathcal{L}_{10-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ petit sont des ovales contenant m_0 ou m_1 en leur intérieur.

En rappelant que les trajectoires sont orthogonales aux courbes régulières $\mathcal{L}_{h_0}$, les différents éléments précédents permettent de tracer qualitativement le portrait de phase de

∇h. La description des isoclines (cf la définition 2.2 ci-dessous) verticales et horizontales permet d'en préciser le tracé.

Preuve de la propostion 2.2. — Sur $\mathcal{L}_0 = \{h = 0\}$, le gradient ∇h est non nul et toute solution γ de $\dot{x} = \nabla h(x)$ avec $\gamma(t_0) \in \mathcal{L}_0$ est croissante sur h : ainsi, pour $t \geq t_0$, la solution $\gamma(t)$ est dans Δ. Une solution ne peut quitter Δ.

Ainsi la trajectoire $(\gamma(t))_{t\geq 0}$ reste dans le compact Δ et d'après la proposition I.4.1, la solution maximale est définie dans le futur sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

La seconde partie résulte de deux lemmes

Lemme 2.3. — *Si m_∞ est un point d'adhérence de la trajectoire $(\gamma(t))_{t\geq 0}$, alors le point m_∞ est un point critique de h.*

Preuve du lemme 2.3. — Il existe une suite croissante $(t_n)_{n\geq 0}$ de limite $+\infty$ telle que la suite $(\gamma(t_n))_{n\geq 0}$ converge vers m_∞. Supposons m_∞ non critique, *i. e.* ∇h non nul en m_∞ et donc sur un des voisinages. Si $\varphi(t,m), t \geq 0, m \in \Delta$, désigne le flot de ∇h, alors

$$h(\varphi(1,m_\infty)) = h(m_\infty) + \int_0^1 \|\nabla h\|^2(\varphi(t,m_\infty))dt > h(m_\infty). \tag{6}$$

On a pareillement $h(\gamma(s)) \leq h(\gamma(t)$ si $s \leq t$. Si l'entier $\tilde{n}$ est choisi tel que $t_{\tilde{n}} \geq t_n + 1$, l'inégalité

$$h(\gamma(t_n)) \leq h(\gamma(t_n+1)) = h(\varphi(1,\gamma(t_n))) \leq h(\gamma(t_{\tilde{n}}))$$

donne par passage à la limite l'inégalité

$$h(m_\infty) \leq h(\varphi(1,m_\infty)) \leq h(m_\infty),$$

qui ne peut avoir lieu vu l'inégalité stricte dans (6). □

Lemme 2.4. — *La trajectoire $(\gamma(t))_{t\geq 0}$ ne peut avoir deux points d'adhérence disjoints.*

Preuve du lemme 2.4. — Supposons l'existence d'une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante avec $t_n \to +\infty$, $\gamma(t_{2n}) \to m_0$ et $\gamma(t_{2n+1}) \to m_1$, m_0 et m_1 étant distincts. Soit r tel que les boules $B(m_0,r)$ et $B(m_1,r)$ sont disjointes et ne contiennent pas d'autre point critique de h que m_0 ou m_1 dans leur adhérence. Il existe N tel que pour $n > N$ et $j = 0,1$ le point $\gamma(t_{2n+j})$ soit dans la boule $B(m_j,r)$. Vu la continuité de la fonction $t \in [t_{2n},t_{2n+1}] \to d(\gamma(t),m_0) - r$ de signe opposé aux extrémités de cet intervalle, il existe un réel $s_n \in (t_{2n},t_{2n+1})$ tel que $d(\gamma(s_n),m_0) = r$. La suite $(\gamma(s_n))_{n\geq N}$ a un point d'adhérence, qui est dans la sphère $\{d(m,m_0) = r\}$ et est un point critique d'après le lemme précédent, ce qui n'est pas possible d'après le choix de r. Le lemme s'en trouve démontré par l'absurde. □

La trajectoire $(\gamma(t))_{t\geq 0}$, incluse dans le compact Δ admet des points d'adhérence, qui sont nécessairement des points critiques de h (*i. e.* des points d'équilibre du gradient ∇h). Par unicité de ceux-ci, la trajectoire converge nécessairement vers un point critique. □

2.4. Un autre exemple de champ de gradient

Soit h la fonction définie sur le plan par

$$h(x,y) = y \sin x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Son gradient

$$\nabla h(x,y) = (y\cos x, \sin x)$$

à croissance sous-linéaire

$$\|\nabla h(x,y)\| \leq |y| + 1$$

à un flot complet d'après le corollaire I.4.2 du lemme de Gronwald. Le champ ∇h est invariant par les transformations

$$(x, y) \to (x + k\pi, y), \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$(x, y) \to (x + \pi, -y).$$

Ainsi, pour tracer son portrait de phase, il suffira de compléter par l'action de ces symétries le portrait sur la partie $\{0 \leq x \leq \pi, y \geq 0\}$.

Ses points d'équilibre sont $m_k = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La hessienne de h est

$$\mathrm{Hess}(h)(x, y) = \begin{pmatrix} -y \sin x & \cos x \\ \cos x & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi, le champ linéarisé au point d'équilibre m_k est le champ linéaire de matrice

$$\mathrm{Hess}(h)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix},$$

avec vecteurs propres $(1, \pm 1)$ pour les valeurs propres $\pm(-1)^k$: on a une configuration en col.

Si h_0 est non nul, les courbes $\{h = h_0\}$ sont les courbes $y = h_0 / \sin x$. L'ensemble de niveau $\{h = 0\}$ est constitué de l'axe horizontal $y = 0$ et des droites verticales passant par les points d'équilibres.

Suivant les définiiton des iscoclines,

Définition 2.2. — La courbe $\mathcal{I}$ est une isocline pour la pente m du champ planaire $X = (X_1, X_2)$ si $m = X_2/X_1$ le long de $\mathcal{I}$.

le champ ∇h a pour isoclines verticales l'axe horizontal $y = 0$ et les droites $x = \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$, qui sont des trajectoires du flot. Ses isoclines horizontales sont les droites verticales passant par les points d'équilibres.

2.5. Dernières remarques sur les champs de gradient plans

Indiquons deux propriétés des champs de gradient, qui donnent des condtions nécessaires pour que le champ X soit un champ de gradient.

- Si h est de classe C^2, alors les composantes (v_1, v_2) du champ de gradient $\nabla h = (v_1, v_2)$ vérifient $\partial_y v_1(x, y) = \partial_x v_2(x, y)$, comme corollaire de l'égalité des dérivées croisées $\partial^2_{xy} h(x, y) = \partial^2_{yx} h(x, y)$ (cf le théorème de Schwarz II.5.3).
- Un champ de gradient ∇h n'a pas de trajectoire T-périodique de période T non nulle : en effet, la fonction $t \to h(\gamma(t))$ est strictement croissante le long d'une trajectoire qui n'est pas un point d'équilibre.

Le champ linéaire $X_0(x, y) = (-y, x)$ n'est pas un champ de gradient. Il ne vérifie pas la première condition, et ses trajectoires sont toutes périodiques, comme l'indique l'expression de ses solutions en terme de la coordonnées complexe $z = x + \mathrm{i}y$: $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} z_0$.

Par ailleurs, le champ $X_1(x, y) = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$ défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifie la première condition, mais a des trajectoires périodiques : la fonction R définie par $R(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est constante le long d'une trajectoire, ainsi $(\dot{x}, \dot{y}) = X_1(x, y)$ avec condition initiale (x_0, y_0) est équivalent au système $(\dot{x}, \dot{y}) = R_0^{-1} X_0(x, y)$, résolu comme $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/R_0} z_0$. En fait, X_1 colinéaire à X_0 a même portrait de phase : en général la multiplication du champ X par la fonction f revient à un changement de variable temporelle dans le flot de X. En effet, pour $t \to \gamma(t)$ trajectoire de X, le changement de temps φ induit

$$\frac{d(\gamma(\varphi(t))}{dt} = \dot{\varphi}(t) X(\gamma(t))$$

et est donc donné par

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\gamma(s))ds.$$

Soit Φ un difféomorphisme de U sur V, d'inverse Ψ. Si X est un champ sur U, $\Phi_*(X)$ a été défini dans la définition 2.1 comme le champ défini sur V par

$$\Phi_*(X)(u,v) = D\Phi(\Psi(u,v))\left[X(\Psi(u,v))\right], \quad (u,v) \in V.$$

Si X est le champ de gradient $X = \nabla h$, comparons les champs $\Phi_*(\nabla h)$ et $\nabla(h \circ \Psi)$. On notera, pour $(u,v) \in V$, $\Psi(u,v) = (\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v))$. Alors,

$$\begin{aligned}
\nabla(h\circ\Psi)(u,v) &= {}^t\left(\frac{\partial(h\circ\Psi)}{\partial u}(u,v), \frac{\partial(h\circ\Psi)}{\partial v}(u,v)\right)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(\Psi(u,v))\frac{\partial \Psi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial h}{\partial y}(\Psi(u,v))\frac{\partial \Psi_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(\Psi(u,v))\frac{\partial \Psi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial h}{\partial y}(\Psi(u,v))\frac{\partial \Psi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Psi_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(\Psi(u,v)) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(\Psi(u,v)) \end{pmatrix}\\
&= {}^tD\Psi(u,v)\nabla h(\Psi(u,v)) = {}^t\left[D\Phi(\Psi(u,v))\right]^{-1}\nabla h(\Psi(u,v))
\end{aligned}$$

Ainsi, si pour $(x,y) \in U$, on a ${}^t\left[D\Phi(x,y)\right]^{-1} = D\Phi(x,y)$, *i. e.* $D\Phi(x,y)$ est une isométrie, alors les champs $\Phi_*(\nabla h)$ et $\nabla(h\circ\Psi)$ sont égaux. Ainsi en général, les champs $\Phi_*(\nabla h)$ et $\nabla(h\circ\Psi)$ ne coïncident pas.

CHAPITRE 3

LE LEMME DE MORSE

Si m_0 n'est pas un point critique de f, alors, supposant $\partial_{x_1}f(m_0)$ non nul, ce qu'il est toujours loisible de faire après renumérotation des variables éventuellement, le changement de variable $\Psi : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (f(x), x_2, \dots, x_n)$ ramène $f = \pi_1 \circ \Psi$ localement à la projection linéaire $\pi_1 : x \to x_1$. Ainsi, au voisinage d'un point non critique, une fonction est linéaire à changement de variable près et es surfaces de niveau de f sont des portions d'hyperplans parallèles.

Le lemme de Morse donne comme forme normale pour une fonction f au voisinage d'un point critique une fonction quadratique : à changement de variable près, les courbes de niveau $\{f(m) = f(m_0)+\varepsilon\}$ sont celles des formes quadratiques. En particulier, en dimension $n = 2$, les lignes de niveau sont des ellipses ou des hyperboles (avec leurs directions asymptotes).

Commençons par l'action d'un difféomorphisme sur la hessienne en un point critique.

Lemme 3.1. — *Si m_0 est un point critique de f et Φ un changement de variable d'un voisinage de $\widetilde{m}_0$ sur un voisinage de $m_0 = \Phi(\widetilde{m}_0)$, alors* $\operatorname{Hess}(f\circ\Phi)(\widetilde{m}_0) = \operatorname{Hess} f(m_0) \circ D\Phi(\widetilde{m}_0)$.

Preuve du lemme 3.1. — Par définition, pour $V \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hess}(f\circ\Phi)(\widetilde{m}_0)(V) &= \frac{d^2\left[f\circ\Phi(\widetilde{m}_0+tV)\right]}{dt^2}_{|t=0} \\
&= \frac{d\left[Df(\Phi(\widetilde{m}_0+tV))D\Phi(\widetilde{m}_0+tV)V\right]}{dt}_{|t=0} \\
&= \Big[\operatorname{Hess} f(\Phi(\widetilde{m}_0+tV))(D\Phi(\widetilde{m}_0+tV)V) \\
&\qquad\qquad + Df(\Phi(\widetilde{m}_0+tV))D^2\Phi(\widetilde{m}_0+tV)(V)V\Big]_{|t=0} \\
&= \operatorname{Hess} f(m_0)(D\Phi(\widetilde{m}_0)V)
\end{aligned}
$$

ce qui est la relation annoncée. □

***Théorème 3.1* (Lemme de Morse).** — *Soit f une fonction de classe $C^r, r \geq 2$, sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, $m_0 \in U$ un point critique de f dont la hessienne est de rang n. Alors il existe un changement de variable $\Phi : V_0 \to U_0$ de classe C^{r-1} où U_0 (resp. V_0) est un voisinage de m_0 dans U (resp. 0 dans $\mathbb{R}^n$) et Q une forme quadratique tels que $f\circ\Phi(y) = f(m_0) + Q(y), y \in V_0$.*

△ D'après le lemme 3.1, la forme quadratique Q est donnée par $\frac{1}{2}\operatorname{Hess} f(m_0)\circ D\Phi(0)$. ▽

Démonstration. — Pour simplifier, on fera l'hypothèse f de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}^n$, m_0 coïncidant avec l'origine et $f(m_0)$ nul. Seuls les cas des dimensions $n = 1$ et 2 seront développés ici : ils suffisent à faire comprendre la démonstration du cas général, dont la rédaction des détails est laissée au lecteur.

En dimension $n = 1$, l'hypothèse signifie $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0)$ non nul. D'après la formule de Taylor avec reste intégral

$$
f(t) = t^2\int_0^1 (1-s)f''(ts)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}
$$

la fonction f est au voisinage de $t = 0$ de la forme $f(t) = \frac{f''(0)t^2}{2}(1+r(t))$ avec la fonction r de classe C^∞ et nulle en $t = 0$. La fonction ψ définie au voisinage de $t = 0$ par $\psi(t) = t\sqrt{1+r(t)}$ est de classe C^∞ avec $\psi'(0) = 1$: c'est donc un difféomorphisme local. Si Φ note son inverse, on a $f(\Phi(u)) = \frac{f''(0)}{2}u^2$, ce qui achève la preuve.

La preuve de la dimension $n = 2$ repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.2. — *Soit f de classe C^∞ définie sur un voisinage de l'origine U dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$ telle que $\partial_x f(0) = 0, \partial^2_{x^2} f(0) \neq 0$. Alors, il existe un changement de variable Φ d'un voisinage de l'origine V_0 sur un voisinage de l'origine $U_0 \subset U$ et une fonction F d'une variable, tous deux de classe C^∞, tel que*

$$
f\circ\Phi(u,v) = \partial^2_{x^2} f(0)u^2 + F(v), \quad (u,v) \in V_0. \tag{8}
$$

La preuve du lemme de Morse se termine en utilisant le lemme 3.2 : la hessienne d'une fonction en un point critique se transforme sous l'action d'un changement de variable comme une forme quadratique sous l'action de la différentielle du changement de variable.

Ainsi, pour f fonction de deux variables avec l'origine comme point critique de hessienne de rang 2, à changement de variable linéaire près, on peut supposer que les hypothèses du lemme 3.2 sont satisfaites. Par un changement de variable, on se ramène donc à une fonction $\widetilde{f}$ de la forme (8) : la fonction f étant à hessienne de rang maximum, il en est de même de $\widetilde{f}$ dont la hessienne est la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\partial^2_{x^2} f(0), \partial^2_{v^2} F(v))$ et donc la dérivée seconde $\partial^2_{v^2} F(0)$ est non nulle et la fonction F est de la forme $\alpha\widetilde{v}^2$ après changemaent de variable (cas de la dimension $n = 1$ du lemme de Morse). Ainsi, composant tous ces changements de variables, on en a obtenu un, noté encore Φ, tel que $f\circ\Phi$ soit une forme quadratique. □

Preuve du lemme 5.2. Vu $\partial_x f(0) = 0, \partial^2_{x^2} f(0) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une fonction ψ définie au voisinage de $y = 0$ avec $\psi(0) = 0$ et telle que l'équation $\partial_x f(x, y) = 0$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$ soit équivalente à l'égalité $x = \psi(y)$. Définissions le changement de variable Θ par $\Theta(u, v) = (u + \psi(v), v)$. Alors, la fonction $\widetilde{f} = f \circ \Theta$ donnée par

$$\widetilde{f}(u, v) = f(u + \psi(v), v),$$

vérifie $\partial_u \widetilde{f}(0, v) = \partial_x f(\psi(v), v) = 0$ et $\partial^2_{u^2} \widetilde{f}(0, v) = \partial^2_{x^2} f(\psi(v), v)$ non nul au voisinage de $v = 0$. Par suite, en reprenant la formule intégrale de Taylor-Lagrange (7) avec paramètre v, on a $\widetilde{f}(u, v) = \widetilde{f}(0, v) + u^2 g(u, v)$ où $g(0, v) = \partial^2_{x^2} f(\psi(v), v)/2$ et $g(0, 0) = \partial^2_{x^2} f(0, 0)/2 \neq 0$. En reprenant le preuve de la dimension 1, on trouve une fonction $h(u, v)$ telle que $g(u, v) = \partial^2_{x^2} f(0, 0) h(u, v)^2$ avec h de classe C^∞ au voisinage de l'origine et $h(0, 0) = 1/\sqrt{2}$. Alors le changement de variable Φ_1 tel que $\Phi_1(u, v) = (uh(u, v), v)$ vérifie

$$\widetilde{f} \circ \Phi_1^{-1}(u_1, v_1) = \widetilde{f}(0, v_1) + \partial^2_{x^2} f(0, 0) u_1^2$$

et on prendra $\Phi = \Theta \circ \widetilde{\Phi}_1^{-1}$. $\square$