Advanced Studies in Pure Mathematics 21, 1992
Zeta Functions in Geometry
pp. 33–70

Fonctions Zêta de Selberg et Surfaces de Géométrie Finie

Laurent Guillopé

Résumé.

Soit M une surface riemannienne à courbure -1 et à bord compact totalement géodésique. Il lui est attachée une fonction zêta Z_M, généralisant la fonction que Selberg introduisit pour les surfaces d'aire finie. L'expression de cette fonction en termes d'invariants spectraux (valeurs propres et résonances) établit son prolongement méromorphe au plan complexe. La preuve combine deux types de formules de trace, à la Selberg et à la Birman-Krein, en s'appuyant sur l'analyse du prolongement méromophe des résolvantes de divers laplaciens et des résultats de type diffusion (stationnaire et non stationnaire) qui en résultent.

Abstract.

Let M a Riemann surface of constant curvature -1, finite geometry and totally geodesic compact boundary. With a similar definition to the Selberg's zeta function associated to a Riemann surface of finite area, the zeta function Z_M is expressed through spectral invariants (eigenvalues and resonances) and extends so to a meromorphic function on the entire complex plane. Linked to trace formulas of Selberg's and Birman–Krein's type, the proof is based on the meromorphic extensions of the resolvent of various laplacians and the following (stationnary and non–stationnary) scattering theory.

0.1. Soit M une surface hyperbolique (*ie.* à courbure constante -1) de géométrie finie à bord géodésique. Le spectre des longueurs $\{l_C\}$ des lacets géodésiques (orientés, se réfléchissant suivant les lois de l'optique géométrique sur le bord) est une partie discrète de $\mathbf{R}$ dont certaines propriétés de distribution sont reflétées par les propriétés analytiques d'un produit eulérien, la fonction zêta de Selberg de la surface M.

Received December 30, 1990.

Travail effectué en partie dans le cadre du Contrat CEE GADGET n° SC1–0105–C et avec le soutien de la fondation Taniguchi.

Soit Z_l^i défini par

$$Z_l^i(s) = \prod_{k \geq 0} 1 - (-1)^{ik} e^{-l(s+k)} \quad , \quad s \in \mathbf{C}$$

où l est un réel non négatif et i un entier.

La fonction zêta de Selberg Z_M est définie comme le produit

$$Z_M = \prod_{\{C\}} Z_M(C)$$

portant sur tous les lacets géodésiques (orientés) C de M avec

$$Z_M(C)(s) = e^{l_C s/8} Z^0_{2l_C}(s/2)$$

si C, de longueur l_C, est porté par le bord et

$$Z_M(C) = Z_{l_C}^{i_C}$$

sinon, pour un lacet C de longueur l_C et de nombre d'intersection i_C avec le bord.

La croissance exponentielle du volume des boules dans le plan hyperbolique implique classiquement la convergence de ce produit infini, au moins sur le demi–plan $\{\Re es > 1\}$. Les pages qui suivent sont consacrées à la preuve du théorème :

Théorème. *La fonction zêta de Selberg d'une surface hyperbolique de géométrie finie et à bord géodésique admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$.

0.2. Si M est d'aire finie, ce résultat classique (et utilisé de manière essentielle dans notre traitement des surfaces d'aire infinie) est issu de la formule de traces de Selberg ([16]), dont on peut reformuler un cas particulier de manière multiplicative : si M est compacte, suivant SARNAK ([15]) ou VOROS ([18]), Z_M est égal, à des facteurs Γ près, au déterminant $\det[\Delta_M - s(1-s)]$ (Δ_M note le laplacien riemannien sur M, le polynôme caractéristique $\det[\Delta_M - \lambda]$ est régularisé par la méthode de la fonction spectrale ζ), alors que si M ne l'est pas, EFFRAT ([3]) exprime Z_M en termes d'un déterminant régularisé de valeurs propres (L^2 et résonances) et du déterminant $\det \mathcal{C}_M(s)$ où $\mathcal{C}_M(s)$ est le coefficient d'entrelacement du système des séries d'Eisenstein associé à l'ensemble (fini) des pointes de M.

FRIED ([5]) démontre aussi ce théorème si l'ensemble récurrent du flot géodésique est compact, *ie.* si la surface est compacte ou d'aire infinie sans pointes. La preuve repose sur l'existence d'une partition de

Markov finie, avec applications de premier retour analytiques et expansives : Z_M s'exprime alors comme produit de déterminants d'opérateurs dits de transfert. Si M a des pointes, la dynamique du flot géodésique est décrite par une partition de Markov dénombrable, avec des applications de premier retour dont les propriétés d'expansion ne sont pas établies. Néanmoins, pour la surface modulaire $\mathbf{H}^2/PSL_2(\mathbf{Z})$, l'ensemble des géodésiques périodiques est en correspondance biunivoque avec celui des points périodiques d'une transformation de Gauß, ce qui permet à MAYER ([10]) d'exprimer Z_M comme produit de deux opérateurs de transfert et d'établir par ce biais le prolongement méromorphe de Z_M.

0.3. Notre étude englobe le cas des surfaces d'aire infinie avec ou sans pointes et repose d'une part sur la théorie de la diffusion pour des surfaces riemanniennes asymptotiquement hyperboliques culminant en la formule de KREIN, d'autre part sur une formule de traces à la *Selberg* pour des surfaces hyperboliques à bord totalement géodésique. Une surface est dite ici asymptotiquement hyperbolique si la métrique est à courbure constante -1 en dehors d'un compact (on se reportera à [11] pour une notion plus faible). Par laplacien sur une variété riemannienne complète X à bord, on entendra, pour cette introduction, l'extension autoadjointe Δ_X du laplacien riemannien symétrique sur $\mathcal{C}_0^\infty(X)$, avec conditions de Neumann sur le bord (des conditions mixtes Dirichlet/Neumann exigent une modification convenable de la définition de Z_M afin que la formule de traces de la proposition C reste valide).

La démonstration du résultat principal de ce travail s'articule le long des trois propositions suivantes.

Proposition A. *Soit V une courbe régulière compacte d'une surface riemannienne M.*
(i) *L'opérateur $T_{M,V}(\lambda) = (\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M\setminus V} - \lambda)^{-1}$ est à trace, méromorphe sur le complémentaire du spectre essentiel de Δ_M.*
(ii) *Si M est de topologie finie, asymptotiquement hyperbolique, $\tau_{M,V}(s) = \operatorname{tr} T_{M,V}(s(1-s))$, définie sur $\{\Re es > 1\}$, admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.*

Proposition B. *Soit M surface riemannienne de topologie finie, asymptotiquement hyperbolique, pour laquelle $\mathcal{C}_M(s)$ note le coefficient d'entrelacement des fonctions d'Eisenstein associées au laplacien Δ_M. Soit V une courbe régulière compacte de M.*
(i) *L'opérateur $\mathcal{C}_M(s)\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)^{-1} - 1$ est à trace, méromorphe (en tant qu'opérateur de $L^2(\Lambda^s M(\infty))$) en $s \in \mathbf{C}$.*
(ii) *Soit $S^\tau_{M,V} = \{(\rho, m_\rho)\}$ l'ensemble des pôles simples ρ avec résidu m_ρ de $(2s-1)\tau_{M,V}(s)$ sur $\{\Re es = 1/2\}$, $S^{\mathcal{S}}_{M,V} = \{(\rho, m_\rho)\}$* (resp. $S_M^{p<1/4}$)

l'ensemble des pôles et zéros (avec multiplicité) de $\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)^{-1}\mathcal{C}_M(s)]$ *dans le demi-plan* $\{\Re es < 1/2\}$ *(resp. du produit* $\prod_{\lambda<1/4}(\lambda - s(1-s))^{m_M(\lambda)}$ *avec* $m_M(\lambda)$ *multiplicité de* λ *comme valeur propre de* Δ_M*) et* $S_{M,V}$ *l'union de* $S^{\mathcal{S}}_{M,V}, S^{\tau}_{M,V}, S^{p<1/4}_M$ *et* $(S^{p<1/4}_{M\setminus V})^{-1}$.

Si $\prod_{\rho\in S_{M,V}}(s-\rho)^{m_\rho}$ *désigne une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$ *dont l'ensemble des zéros/pôles (avec multiplicité) est* $S_{M,V}$*, alors il existe une fonction entière* $F_{M,V}$ *telle que*

$$\tau_{M,V}(s) = \frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log\big[\prod_{\rho\in S_{M,V}}(s-\rho)^{m_\rho}e^{F_{M,V}(s)}\big].$$

Proposition C. *Soit* M *une surface de topologie finie, à courbure constante* -1 *et* V *une courbe géodésique compacte de* M.

$$\tau_{M,V}(s) = \frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log[Z_M(s)/Z_{M\setminus V}(s)].$$

0.4. Soit donc (M,g) surface riemannienne de topologie finie, asymptotiquement hyperbolique. Cette surface se décompose en l'union d'une partie compacte et d'un nombre fini de bouts, demi–cylindres riemanniens $(\mathbf{R}/l\mathbf{Z}\times(r_0,\infty), h^2(r)d\theta^2+dr^2)$ avec $h''=h$ et donc de deux types : pointus ($h(\infty)=0$) ou évasés ($h(\infty)=\infty$) dont seuls les bouts pointus sont d'aire finie. Si γ est une isométrie parabolique (*resp.* hyperbolique) du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$, le cylindre $C_\gamma = \mathbf{H}^2/\langle\gamma\rangle$ est un exemple de telle surface. Si γ est elliptique d'ordre fini e, la surface singulière C_γ est l'union de deux cônes d'angle $\alpha = 2\pi/e$; l'ultime exemple de bout évasé est celui d'un cône du type précédent d'angle α quelconque. Les bouts d'une surface surface de géométrie finie, (globalement) hyperbolique et à caractéristique d'Euler–Poincaré négative, sont soit des entonnoirs (isométriques à un des bouts d'un cylindre hyperbolique), soit des pointes (isométriques au bout d'aire finie d'un cylindre parabolique).

Suivant Mazzeo–Melrose ([11]), il convient de considérer M comme l'intérieur d'un espace compact $\overline{M}$ dont le bord à l'infini $M(\infty) = \overline{M}\setminus M$ ($=\{\rho=0\}$ pour une fonction ρ sur $\overline{M}$ convenablement choisie) est l'union compacte de composantes de dimension 1 (bords circulaires des vases) et de points (les pointes) ($\overline{M}$ privé des pointes est une variété à bord).

0.5. La proposition A repose sur la construction d'une paramétrice pour la résolvante du laplacien. Pour le plan hyperbolique (*resp.* les surfaces élémentaires, quotient du plan par un groupe discret abélien d'isométries), le noyau de la résolvante est exprimable en termes d'une fonction hypergéométrique (*resp.* une série), ce qui permet d'analyser tant ses singularités que son comportement à l'infini. S'en déduit une paramétrice sur les surfaces ayant des bouts portés par ces surfaces élémentaires. Pour une surface ayant un bout non élémentaire, les techniques sont similaires, une fois qu'ont été introduits des espaces à poids $L^{2,a}(M) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(M), e^{ad(\cdot,m_0)}f \in L^2(M)\}$.

La proposition B repose sur la théorie de la diffusion (stationnaire et non stationnaire) sur les surfaces $M, M \setminus V$. On introduit, en guise de fonctions propres du spectre continu, les fonctions $E_M(s,m_\infty)(m)$, dites fonctions d'Eisenstein (en souvenir des séries d'Eisenstein avec lesquelles elles coïncident, à un facteur près, si M est hyperbolique), définies comme les traces du noyau

$$(\Delta_M - s(1-s))^{-1}(m,m')\rho(m')^{\mathrm{rg}(m')-s}$$

sur la strate $M \times M(\infty)$ du bord de $\overline{M} \times \overline{M}$, où l'application rg est constante au voisinage de $M(\infty)$, égale à $1 - \dim C$ sur chaque composante C de $M(\infty)$. Le comportement à l'infini de ces fonctions $E_M(s)$ ($\Re es \in (0,1)$) est décrit simplement en termes des coefficients d'Eisenstein $\mathcal{C}_M$, noyaux qui sont (après normalisation convenable) des traces distributionnelles de $E_M(s,m_\infty)(m)$ sur le bord $M(\infty) \times M(\infty)$. Aussi le comportement du noyau de la résolvante (et de son prolongement méromorphe en $s \in \mathbf{C}$) est–il au cœur de notre présentation de la diffusion (qui s'inspire très largement des travaux de AGMON ([1]) et PERRY ([12])) sur ces surfaces ; si la surface (et tel est le cas lorsque la métrique est à courbure constante) a tous ses bouts portés par des cylindres à courbure -1 complets, l'analyse est faite à partir de celle des résolvantes (simples séries) sur ces cylindres, les autres cas sont examinés en introduisant des partitions de l'unité du bord à l'infini et des espaces L^2 à poids, préfigurant ainsi (*a posteriori*) l'étude générale de MAZZEO–MELROSE.

Cette analyse des fonctions d'Eisenstein génère d'une part la décomposition spectrale de la partie absolument continue du laplacien Δ_M, d'autre part les équations fonctionnelles auxquelles sont assujettis les fonctions et coefficients d'Eisenstein :

$$\begin{aligned} &E_M(s) = \mathcal{C}_M(1-s)E_M(1-s) \\ &\mathcal{C}_M(s)\mathcal{C}_M(1-s) = 1, \end{aligned}$$

ce qui permet d'expliciter les opérateurs d'onde de la théorie de diffusion non stationnaire du couple $(\Delta_M, \Delta_{M\setminus V})$. La proposition B découle alors de principes généraux établis par BIRMAN, KATO et KREIN ([2], [8]). Notons au passage que, si la proposition A établit le prolongement méromorphe de la trace $\tau_{M,V}$, sa preuve est incapable de préciser l'ordre de ces pôles (et la valeur de leurs résidus), ce que réalise parfaitement la proposition B en exprimant cette trace en termes d'une dérivée logarithmique.

La proposition C, basée sur les calculs mis en œuvre par SELBERG pour sa formule de traces, n'est valable que pour des surfaces $M, M \setminus V$ à courbure constante négative et bord totalement géodésique.

Le théorème résulte facilement de la combinaison de ces trois propositions : une surface hyperbolique de géométrie finie est l'union de surfaces dont le prolongement méromorphe des fonctions zêta est classiquement établi ([16]), à savoir sa région de Nielsen (ou cœur convexe, surface d'aire finie) N et un nombre fini de demi–cylindres hyperboliques qui bordent N le long d'une courbe géodésique $V = \partial N$.

0.6. À tout fibré plat hermitien $\xi \to M$ (de rang d_ξ) est associée une fonction zêta Z_ξ. Les énoncés précédents conservent, *mutatis mutandis*, leur validité pour des fibrés hermitiens avec connection, plats à l'infini. S'introduit notamment un espace singulier $\overline{\xi}$, fibré sur la compactification $\overline{M}$: sa partie à l'infini $\xi(\infty)$ est un fibré de rang d_ξ sur les composantes de dimension 1 de $M(\infty)$ et de rang $d_\xi(p_\infty)$ sur une pointe p_∞ si $d_\xi(p_\infty)$ est la multiplicité de la valeur propre 1 de l'holonomie de ξ pour un lacet autour de cette pointe. Les fonctions d'Eisenstein $E_\xi(s)$ sont définies comme des sections du fibré $(\Lambda^s M(\infty) \otimes \xi(\infty)) \boxtimes \xi^*$ de base $M(\infty) \times M$.

0.7. Décrivons brièvement le contenu des différentes parties qui suivent. La première partie est consacrée au noyau de la résolvante, son prolongement méromorphe et la preuve de la proposition A. La seconde partie introduit les fonctions d'Eisenstein et la formule (héritage d'une formule) de *Green* qu'elles vérifient donne une représentation spectrale de la partie absolument continue de Δ_M, ainsi que l'équation fonctionnelle vérifiée par les coefficients d'Eisenstein, noyaux décrivant le comportement à l'infini des fonctions du même nom. Les opérateurs d'onde et de diffusion pour le couple $(\Delta_M, \Delta_{M\setminus V})$ sont explicités dans la troisième partie. Puis, la théorie de Birman–Kato–Krein est rappelée et son application amène naturellement la proposition B. On précise alors comment les énoncés précédents s'adaptent à la situation de fibrés hermitiens avec connexion, plats à l'infini. Dans la sixième partie, la formule de traces exacte de la proposition C est établie. On termine par quelques remarques sur la distribution asymptotique du spectre des longueurs.

0.8. Concluons cette introduction par quelques questions.

La fonction zêta Z_M est d'ordre 2 (si Z_M a des pôles, cela signifie qu'elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre 2) si M est d'aire finie (par la voie spectrale, *cf.* [17]) ou de volume infini sans pointes (par le biais dynamique, *cf.* [5]); qu'en est–il en général ?

Quel est le type de croissance du déterminant $\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}^{-1}(s)\mathcal{C}_M(s)]$? Quelles relations entre zéros et pôles de ce déterminant et les pôles des résolvantes $R_M(s)$, $R_{M\setminus V}(s)$?

Y–a–t–il une possibilité d'utiliser ces méthodes en dimension supérieure ; le premier cas d'intéret est celui des variétés de dimension 3 associées à des groupes quasi–fuchsiens, la géométrie y est plus élaborée : le cœur convexe (compact) est bordé par une surface hyperbolique plissée le long d'une lamination géodésique.

Pour une surface supposée à courbure constante seulement au voisinage de l'infini (qui ne donne plus lieu à une formule de traces à la Selberg), le domaine de méromorphie de Z_M contient un voisinage du demi–plan $\{\Re es \geq h_M\}$, où h_M note l'entropie du flot géodésique (*cf.* par exemple [13]). Ce voisinage serait–il égal à $\mathbf{C}$ tout entier ?

Par un argument taubérien basé sur le théorème de Wiener–Ikehara, on peut préciser le comportement asymptotique de la fonction de comptage associée au spectre des longueurs des géodésiques périodiques $\pi_M(l)$ $= \#\{C, l_C \leq l\}$ lorsque le bas du spectre λ_M du laplacien Δ_M est cons- linebreak titué d'une valeur propre λ_M (nécessairement simple alors) :

$$\pi_M(l) \sim \frac{e^{h_M l}}{h_M l}, l \to +\infty$$

où h_M, entropie du flot géodésique sur M ($h_M > 1/2$ alors), détermine λ_M suivant $\lambda_M = h_M(1 - h_M)$. Peut-on préciser cet asymptotique par une estimation du reste, comme c'est le cas pour des

(*ie.* les surfaces sans pointes, d'aire infinie et à entropie au plus égale à $1/2$), un argument de dynamique symbolique permet à LALLEY ([9]) d'obtenir l'asymptotique précédent ; de quelle manière l'obtenir par la théorie spectrale ?

Si α est une classe d'homologie de M et π_M^α la fonction de comptage associée à l'ensemble des géodésiques homologues à α, l'asymptotique de π_M^α est établi dans le cas M compact par KATSUDA–SUNADA ([7]) et PHILLIPS–SARNAK ([14]) et celui d'aire finie par EPSTEIN ([4]) en analysant les propriétés spectrales de la famille (Δ_ξ) où ξ parcourt la famille des fibrés en droites plats de base M (ou de manière équivalente, le tore des caractères de l'homologie $H^1(M,\mathbf{Z})$). Peut–on mener un travail similaire pour M d'aire infinie?

§1. Résolvante

1.1. Dans la suite, M désigne une surface (à bord compact non vide éventuellement) munie d'une métrique dg^2, égale à l'union d'une surface compacte à bord, bord (ou partie) auquel est rattaché un nombre fini de bouts hyperboliques, demi–cylindres (homéomorphes à $S^1 \times (0,\infty)$) portant une métrique à courbure -1.

Un tel bout est porté par le bout riemannien $b_h^l(r_0) = (\mathbf{R}/l\mathbf{Z} \times (r_0,\infty), h(r)^2 d\theta^2 + dr^2)$ avec $h'' = h$. Si γ est une isométrie du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$ engendrant un sous–groupe discret de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$, le cylindre $C_\gamma = \mathbf{H}^2/\langle\gamma\rangle$ (singulier si γ est elliptique) a de tels bouts hyperboliques et inversement, les bouts $b^1_{e^r \text{ ou } e^{-r}}, b^{2\pi/e}_{\mathrm{sh}\, r}, b^l_{\mathrm{ch}\, r}$ sont isométriques *resp.* au bout d'aire infinie ou finie de C_γ avec γ parabolique, un des bouts de C_γ avec γ hyperbolique de distance de translation l, un des bouts du cylindre C_γ avec γ elliptique d'ordre e. Le bout $b^\alpha_{\mathrm{sh}\, r}$ (n'apparaissant pas dans la liste précédente) est à voir comme un cône hyperbolique d'angle α ; c'est le seul qui, à un revêtement de degré fini près, ne s'immerge pas dans le plan $\mathbf{H}^2$.

Un bout évasé b de volume infini est compactifié en ajoutant $\mathbf{R}/l\mathbf{Z} \times \{\infty\}$, ce bord à l'infini $b(\infty)$ étant défini comme $\{\rho = 0\}$ où $\rho = h^{-1}$ est une fonction régulière sur la variété à bord $\bar{b} = b \cup b(\infty)$. Pour le bout pointu $b^1_{e^{-r}}$, on compactifie en ajoutant un point (*la pointe*), définie par $\rho = 0$ avec $\rho(e^{-r}) = e^{-r}$.

Une surface hyperbolique a des bouts de l'un des deux types sui vants : soit une pointe $(b^1_{e^{-r}})$, soit un entonnoir $(b^l_{\mathrm{ch}\, r})$, pour lesquels on prendra comme modèle dans le demi–plan de Poincaré $\mathbf{H}^2 = \{z = x + iy, y > 0\}$ la bande $\{x+iy, 0 \le x \le 1, y \ge A\}$ avec identification des côtés verticaux et la portion de couronne $\{x+iy, x/y \ge A, 1 \le x^2+y^2 \le e^l\}$ avec identification des cotés circulaires *resp.*. La pointe (l'entonnoir) est compactifiée en ajoutant un point $y = \infty$ (le cercle $\mathbf{R}_x^+/e^l\mathbf{Z} \times \{y = 0\}$ *resp.*), les fonctions ρ définissant les bords à l'infini étant par exemple $\rho(m) = y^{-1}$ et $\rho(m) = y/x$.

1.2. La compactification de M correspondante est notée $\overline{M}$ et son bord à l'infini $M(\infty) = \overline{M} \setminus M$, union d'une strate $M(\infty)_1$ de dimension 1 et de $M(\infty)_0$, ensemble fini de pointes. Une fonction est dite lisse sur $\overline{M}$ si elle l'est sur la variété à bord $M \cup M(\infty)_1$, avec toutes ses dérivées prolongeables à $\overline{M}$ (pour une telle fonction, les composantes de Fourier non constantes de sa restriction sur les horocycles d'une pointe sont plats à l'infini).

On introduit une fonction ρ (lisse au sens précédent) sur $\overline{M}$ définissant $M(\infty)$ (suivant $\rho = 0$), régulière au voisinage de $M(\infty)_1$. On note par rg une fonction sur $\overline{M}$ valant 1 (0 *resp.*) sur tout bout pointu (évasé *resp.*).

Théorème 1.1. *Le noyau $R_M(s, m, m'), (\Re e s > 1/2)$ de la résolvante $(\Delta_M - s(1-s))^{-1}$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$. Ses parties polaires sont de rang fini. Il se décompose en $R_M = P_M + K_M$. Le terme P_M est à support dans $K_1 \cup \cup_{\{b\}} b \times b$ (K_1 compact) et coïncide sur $b \times b$ avec le noyau de la résolvante du cylindre portant b. Le noyau $K_M(s, m, m')\rho(m)^{\mathrm{rg}(m)-s}\rho(m')^{\mathrm{rg}(m')-s}$, régulier sur $M \times M$, admet un prolongement lisse à $\overline{M} \times \overline{M}$ pour s en dehors de l'ensemble discret $\mathcal{P}_M$ des pôles de R_M.*

Remarque 1.1. Pour un noyau $K(s, m, m')$ dépendant méro morphiquement de s, on dit que la partie polaire en le pôle s_0 est de rang fini si elle est de la forme $\sum_{i=1}^{I} (s - s_0)^{-i} \sum_{j=1}^{j_i} \varphi_j^i(m) \psi_j^i(m')$, pour des φ_j^i, ψ_j^i convenables.

1.3. La preuve de ce théorème (et à sa suite celle de la proposition A) repose sur la théorie de Fredholm. Nous développons tout d'abord le cas de surfaces à bouts élémentaires, évitant le recours aux espaces à poids $L^{2,a}$. Nous indiquons brièvement après les modifications à apporter pour traiter les surfaces portant des bouts non élémentaires.

1.4. Commençons par l'étude du cas particulier des cylindres élémentaires :

Lemme 1.2. *Soit γ une isométrie elliptique d'ordre fini, hyperbolique ou parabolique de $\mathbf{H}^2$, C_γ le cylindre (singulier si γ est elliptique) $\mathbf{H}^2/\langle\gamma\rangle$.*
(i) *Le noyau R_{C_γ} de la résolvante du laplacien sur le cylindre C_γ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, avec parties polaires de rang fini.*
(ii) *Le noyau se décompose suivant $R_{C_\gamma} = \tilde{R}_\gamma + K_\gamma$ où $\tilde{R}_\gamma$, à support dans $\{d(m, m') < L\}$, est égal au noyau libre $R_{\mathbf{H}^2}$ au voisinage de la diagonale et le noyau $K_\gamma(s, m, m')\rho(m)^{\mathrm{rg}(m)-s}\rho(m')^{\mathrm{rg}(m')-s}$ admet un prolongement lisse sur $\overline{C}_\gamma \times \overline{C}_\gamma$, et ce pour s dans $\mathbf{C}$ privé d'un ensemble discret.*

(iii) *Soit γ parabolique et p_∞ la pointe de C_γ. Alors*

$$R_{C\gamma}(s,m,m')\rho(m')^{1-s}_{|m'=p_\infty} = \rho(m)^{-s}/(2s-1).$$

Preuve. La résolvante $(\Delta_{\mathbf{H}^2} - s(1-s))^{-1}, \Re es > 1/2$ du laplacien sur le plan hyperbolique a pour noyau

$$R_{\mathbf{H}^2}(s,m,m') = (4\pi)^{-1} \int_0^1 (t(1-t))^{s-1}(t+\sigma)^{-s}dt,$$

avec $\sigma = \sigma(m,m')$ vérifiant $\sigma = \mathrm{sh}^2(d(m,m')/2)(= |z-z'|^2/4yy'$ en coordonnées dans le demi–plan de Poincaré). Ce noyau admet en dehors de la diagonale $\{z = z'\}$ un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$. Au voisinage de $\sigma = \infty$ (*ie.* $d(m,m') \to \infty$) l'intégrale a le développement (valable pour tout s après prolongement méromorphe)

$$\int_0^1 (t(1-t))^{s-1}(t+\sigma)^{-s} = \sum_{l\geq 0} B(s+l,s)B_l(-s)\sigma^{-s-l},$$

(où B est la fonction bêta classique et $(B_l(t))$ les coefficients du développement de $(1+u)^t$).

Le noyau de la résolvante R_{C_γ} du laplacien sur le cylindre C_γ s'obtient par moyennisation de $R_{\mathbf{H}^2}$ sur le groupe $\langle\gamma\rangle$:

$$R_{C_\gamma}(s,m,m') = \sum_{\varphi\in\langle\gamma\rangle} R_{\mathbf{H}^2}(s,z,\varphi z'), \Re es > 1/2,$$

si (z,z') sont des représentants de (m,m') dans un domaine fondamental pour $\langle\gamma\rangle$.

Si γ est elliptique d'ordre fini, la somme est finie et le lemme résulte des propriétés de la résolvante sur le plan hyperbolique.

Si γ est hyperbolique, on a

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \mathrm{sh}^2[d(z,\gamma^n z')/2] \\ &= ((x/x')(1+\rho^2)e^{nl} - 2(1+\rho\rho') + (x'/x)(1+\rho'^2)e^{-nl})/4\rho\rho'.\end{aligned}$$

Nous omettrons la démonstration du lemme suivant :

Lemme 1.3. *Pour a,b,c réels tels que la forme quadratique $au^2 + buv + cv^2$ soit définie positive, ξ de module 1 et k réel strictement supérieur à 1, soit la fonction $S_\xi(a,b,c,k)$ définie par $S_\xi(a,b,c,k)(s) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \xi^n(ak^n + b + ck^{-n})^{-s}$. Cette série, absolument convergente sur*

$\{\Re e\, s > 0\}$, *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$. *Chacun de ses pôles est simple, de la forme* $s_0 = \log\xi/\log k - q$ *(où* log *est le logarithme multivalué et* $q \in \mathbf{N}$*) avec résidu* $(\log k)^{-1}\big(a^{-s_0}\mu_q(b/a, c/a, s_0) + c^{-s_0}\mu_q(b/c, a/c, s_0)\big)$. *On a noté par* $\mu_m(\alpha, \beta, s)$ *la suite des coefficients du développement de Taylor de* $(1 + \alpha u + \beta u^2)^{-s}$ *en* $u = 0$.

On en déduit le développement de $(4\pi)R_{C_\gamma}(s, m, m')$

$$\sum_{l=0}^{L} B(s+l, s)B_l(-s)(4\rho\rho')^{s+l}S_1(a, b, c, e^l)(s+l) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} R_L(s, \sigma_n)$$

avec $a = x/x'(1+\rho^2), b/a = -2(1+\rho\rho'), c = (x'/x)(1+\rho'^2)$.

Le reste $R_L(s, \sigma_n)$ est un $O(\sigma_n^{-s-L-1})$, s'en déduit le prolongement lisse à $\overline{C}_\gamma \times \overline{C}_\gamma$ du noyau $(\rho\rho')^{s+1}\sum_{n\in\mathbf{Z}} R_L(s, \sigma_n)$ pour $\Re es > -L-1$, ce qui achève la preuve de (i).

Si γ est parabolique, les propriétés de la série définissant R_{C_γ} au voisinage de la pointe de C_γ, sont données par le lemme suivant :

Lemme 1.4. *Soit* $S_\xi(a, b)$ *définie par* $S_\xi(a, b)(s) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \xi^n(|n + a|^2 + b^2)^{-s}$, *où* ξ *est de module 1. La série* $S_\xi(a, b)$, *absolument convergente sur* $\{\Re e\, s > 1/2\}$, *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$ *avec l'asymptotique*

$$S_\xi(a, b)(s) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} b^{1-2s}(\delta_{\xi,1} + o(b^{-\infty})), b \to \infty$$

uniformément en a *et pour* $s \notin 1/2 - \mathbf{N}$.

Preuve. Pour $\Re es > 1/2$, on introduit le facteur $\Gamma(s)$ avant d'utiliser la formule de Poisson :

$$\Gamma(s)S_\xi(a, b)(s) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_0^\infty \xi^n e^{-(|a+n|^2+b^2)t} t^s \frac{dt}{t} =$$

$$\sqrt{\pi} b^{1-2s} \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1/2} \left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-(\pi b(k - i\log\xi))^2/u + 2ia\pi(k - i\log\xi)}\right] \frac{du}{u}.$$

Si $\xi = 1$,

$$\Gamma(s)S_\xi(a, b)(s)$$

$$= \sqrt{\pi} b^{1-2s}\left[\Gamma(s-1/2) + \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1/2} \sum_{k\neq 0} e^{-(\pi bk)^2/u + 2iak\pi} \frac{du}{u}\right]$$

où le second terme, dans lequel $\sum_{k\neq 0} e^{-(\pi bk)^2/u+2iak\pi} = O((u/b^2)^{+\infty})$, se prolonge méromorphiquement, en étant plat en $b=\infty$. Si $\xi \neq 1$, tous les termes sont plats en $b=\infty$. Q.E.D.

On a donc

$$(4\pi)R_{C_\gamma}(s,m,m') =$$
$$\sum_{l=0}^{L} B(s+l,s)B_l(-s)(4yy')^{-s-l}S_1(a,b)(s+l) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} R_L(s,\sigma_n)$$

avec $a = x-x', b = y-y'$ et où le reste est majoré suivant

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} R_L(s,\sigma_n) = O(S_1(a,b)(s+L)(4yy')^{-(s+L)}) = O((4y)^{s+L}{y'}^{1-s-L}).$$

Quant à l'analyse du noyau R_{C_γ} au voisinage du bout évasé du cylindre parabolique, elle est menée de manière analogue aux calculs précédents.

1.5. Achevons la preuve du théorème 1.1. Soit $\mathcal{U} = (U_0, (U_b)_{\{b\}})$ un recouvrement de M tel que $U_b \subset b$ et U_0 est un voisinage relativement compact de $M \setminus \cup_{\{b\}} U_b$. Soit X une surface compacte contenant isométriquement l'ouvert U_0 (de la même manière que U_b sera considéré comme plongé isométriquement dans le cylindre C_b).

Soit $(\varphi_0, (\varphi_b)_{\{b\}})$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ et $(\psi_0, (\psi_b)_{\{b\}})$ une famille de fonctions régulières telles que $\psi_\star\varphi_\star = \varphi_\star$ et $\operatorname{supp}\psi_\star \subset U_\star$. On note par $D_\star$ la résolvante $(\Delta_\star - s(1-s))^{-1}$ où $\Delta_\star$ est égal Δ_X ou Δ_{C_b} suivant $\star$ et par $\psi_\star D_\star \varphi_\star$ l'opérateur sur $L^2(M)$ qui s'en déduit.

L'opérateur $P_M = \sum_\star \psi_\star D_\star \varphi_\star$ est une paramétrice de la résolvante de Δ_M au sens où

$$\mathcal{K}_M(s) = (\Delta_M - s(1-s))P_M(s) - 1 = \sum_\star [\Delta, \psi_\star] D_\star \varphi_\star$$

est régularisant et envoie $L^2(M)$ dans les fonctions à support dans le compact $\overline{U}_0$. On peut appliquer la théorie de Fredholm, la norme $||\mathcal{K}_M(s)||$ tend vers 0 lorsque $s \to +\infty$, ainsi existe-t-il un ensemble discret $\mathcal{P}_M$ tel que $(1+\mathcal{K}_M(s))$, inversible sur $\mathbf{C}\setminus\mathcal{P}_M$, définisse une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$. Il en est de même de

$$(\Delta_M - s(1-s))^{-1} = P_M(s)(1+\mathcal{K}_M(s))^{-1}.$$

Soit $\overline{\mathcal{K}_M}(s) = 1 - (1+\mathcal{K}_M(s))^{-1}$, qui vérifie

$$\overline{\mathcal{K}_M} = \mathcal{K}_M - \overline{\mathcal{K}_M}\mathcal{K}_M = \mathcal{K}_M - \mathcal{K}_M\overline{\mathcal{K}_M}.$$

Les propriétés du noyau de $K_M = -P_M\overline{\mathcal{K}_M}$ résultent alors de celles des noyaux $P_M(s,m,m''), m \in M, m'' \in \overline{U}_0$ et $\mathcal{K}_M(s)(m'',m')$, $\overline{\mathcal{K}_M}(s)(m'',m')$ issues du lemme précédent. Q.E.D.

1.6. Terminons par la preuve de la proposition A, en commençant par montrer la seconde affirmation.

Reprenons pour M et $M \setminus V$ la construction de la paramétrice. On choisit U_0, φ_0 telle que $\varphi_0 = 1$ sur V. Alors

$$(\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M\setminus V} - \lambda)^{-1} = [P_M - P_{M\setminus V}] + P_M\mathcal{K}_M - P_{M\setminus V}\mathcal{K}_{M\setminus V}.$$

Montrons que chacun des trois termes est traçable avec un prolongement méromorphe en le paramètre s ($\lambda = s(1-s)$).

Le premier est égal à $\psi_0(D_X - D_{X\setminus V})\varphi_0$, traçable comme opérateur singulier de Green d'ordre -2 ([6]) sur la surface X, avec dépendance holomorphe en $\lambda \in \mathbf{C}$, ainsi que sa trace égale à $\mathrm{tr}_{L^2(X)}[\psi_0(D_X - D_{X\setminus V})\varphi_0]$.

Les deux derniers termes sont de même nature. Considérons, pour l'exemple, le second, de la forme

$$P_M\overline{\mathcal{K}_M} = P_M\mathcal{K}_M - P_M\overline{\mathcal{K}_M}\mathcal{K}_M$$

où chaque terme est traçable (car $\mathcal{K}_M$ d'image incluse dans $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{U}_0)$ l'est).

Soit θ une fonction régulière à support compact valant 1 sur U_0 (ainsi est vérifiée $\theta\mathcal{K}_M = \mathcal{K}_M$).

On a pour le premier terme

$$\mathrm{tr}\, P_M\mathcal{K}_M = \mathrm{tr}\, P_M\theta\theta\mathcal{K}_M = \mathrm{tr}\,\theta\mathcal{K}_M P_M\theta$$

L'opérateur $\theta\mathcal{K}_M P_M\theta$ est somme d'opérateurs du type $\eta R\eta D_\star\eta$ ($\eta \in C_0^\infty(M)$, R régularisant, construit à partir de K_M et méromorphe comme lui en $s \in \mathbf{C}$) ou $\eta[\Delta,\psi_\star]D_\star\varphi_\star\eta$. La trace de ce dernier terme est transformée en

$$\mathrm{tr}\,\eta[\Delta,\psi_\star][D_\star,\varphi_\star]D_\star\eta$$

grâce à la nullité de $[\Delta,\psi_\star]\varphi_\star$, soit finalement

$$-\,\mathrm{tr}\,\eta[\Delta,\psi_\star]D_\star[\Delta,\varphi_\star]D_\star^2\eta$$

en utilisant la formule de crochets $[D_\star,\varphi_\star] = -D_\star[\Delta,\varphi_\star]D_\star$. On obtient alors le prolongement méromorphe en $s \in \mathbf{C}$ de ces différentes traces (et celle du terme $P_M\overline{\mathcal{K}_M}\mathcal{K}_M$) en utilisant le prolongement des noyaux $D_\star(s)(m,m')$ (localement uniformément hors de la diagonale de $M \times M$).

Quant à la première affirmation, la construction d'une paramétrice de la résolvante de $\Delta_{M\setminus V}$ en terme des résolvantes de Δ_M et $\Delta_{X\setminus V}$ la démontre, avec des arguments analogues à ceux qui précèdent. Q.E.D.

1.7. Pour un bout non élémentaire (par exemple porté par un cône obtenu en identifiant deux géodésiques concourantes avec un angle non commensurable à π), il n'est pas possible de construire une paramétrice comme somme sur un groupe. Cette construction se fait par l'intermédiaire de partitions de l'unité et en appliquant la théorie de Fredholm dans les espaces à poids ; nous serons ici brefs, renvoyant le lecteur à l'étude par Mazzeo–Melrose ([11]) de laplaciens sur des variétés à courbure asymtotiquement constante.

Lemme 1.5. *Soit B une surface portant un unique bout b évasé et $a > 0$. Il existe un noyau $E_B^a(s,m,m'), \Re es > -a, m, m' \in B$ induisant un opérateur continu de $L^{2,a}(B)$ dans $L^{2,-a}(B)$ et tel que l'opérateur $K_B^a = (\Delta_b - s(1-s))E_b^a - 1$ soit régularisant, compact de $L^{2,a}(B)$.*

Preuve. On suppose le bout b isométrique au produit $\mathbf{R}/l\mathbf{Z} \times (r_0, \infty)$ muni de la métrique $h(r)^2 d\theta^2 + dr^2$ avec $h'' = h, h(\infty) = \infty$. Soit $(\varphi_i)_{i\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ une partition de l'unité de $\mathbf{R}/l\mathbf{Z}$ telle que $\varphi_i\varphi_j \neq 0$ seulement si (i,j) est dans $\{i-j = -1, 0 \text{ ou } 1\}$ (dont on notera χ_1 la fonction caractéristique). Notant aussi par φ_i les applications induites sur b, on suppose que, pour $\chi_1(i,j) = 1$, il existe un prolongement isométrique $m \to m_{i,j}$ de $\operatorname{Supp}\varphi_i \cup \operatorname{Supp}\varphi_j$ dans le plan $\mathbf{H}^2$.

Soit $(E_b^i)_{i\geq 0}(s), s \in \mathbf{C}$ la suite d'opérateurs à noyaux définie par récurrence suivant

$$E_b^0(s,m,m') = \sum_{i,j} \chi_1(i,j)\varphi_i(m)R_{\mathbf{H}^2}(s, m_{i,j}, m'_{i,j})\varphi_j(m')$$
$$E_b^{i+1} = E_b^i + K_b^i/[(s+i+1)(s+i) + s(1-s)].$$

avec

$$K_b^i = (\Delta - s(1-s))E_b^i - 1.$$

Remarquons, pour f régulière à support compact sur $\overline{\mathbf{H}_2} = \{\Im mz \geq 0\}$,

$$\Delta_{\mathbf{H}^2}(y^\alpha f) = \alpha(1-\alpha)y^\alpha f + O(y^{\alpha+1});$$

ainsi, pour f régulière sur $\overline{B}$,

$$\Delta_B(\rho^\alpha f) = \alpha(1-\alpha)\rho^\alpha f + O(\rho^{\alpha+1}).$$

On vérifie

$$K_b^0 = O(\rho(m)^{s+1}\rho(m')^s),$$

d'où on déduit, pour $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}(\Delta_B - s(1-s))K_b^i &= (s+1+i)(-s-i)K_b^i + O(\rho(m)^{s+2+i}\rho(m')^s)\\ K_b^i &= O(\rho(m)^{s+1+i}\rho(m')^s).\end{aligned}$$

Le noyau K_b^i est régulier sur $B \times B$ et le noyau $\rho(m)^{-l}K_b^{k+l-1}\rho(m')^k$ a un prolongement régulier à $\overline{B} \times \overline{B}$ pour $\Re es > -k$.

La métrique $g_\rho = \rho g$ se prolonge en une métrique régulière $\overline{g}_\rho$ sur $\overline{B}$. Introduisant l'espace à poids $L^{2,a}(B) = \{f \in L^2_{\text{loc}}(B), e^{ad(\cdot,m_0)}f \in L^2(B)\}$, on vérifie l'égalité des espaces $L^2(\overline{B}, dv_{\overline{g}_\rho})$ et $L^{2,1}(B)$, vu que $\rho/e^{d(\cdot,m_0)}$ est dans un compact de $(0,+\infty)$. En résulte que le noyau $K_b^{k+l-1}(s,m,m')$ induit un opérateur compact de $L^{2,k+1}(B)$ dans $L^{2,l}(B)$ pour $\Re es > -k$.

On complète cet opérateur $E_b^{2[a]}$ à l'aide d'une paramétrice du laplacien sur un voisinage compact de $B\setminus b$ pour obtenir la paramétrice, notée E_B^a, sur la surface B, qui vérifie clairement les propriétés énoncées dans le lemme. Q.E.D.

Pour une surface M à bouts asymptotiquement hyperboliques, on construit, comme précédemment, une paramétrice à partir de celles de ses bouts (décrites dans le dernier lemme) qui diffère de la résolvante suivant

$$(\Delta_M - s(1-s))^{-1} = E_M^a(s) + K_M^a(s),$$

où l'opérateur $K_M^a(s)$ est défini méromorphe sur $\{\Re es > -a\}$ comme opérateur interne à $L^{2,a}(M)$. Pour $\Re es > 1$ et $a > 0$ quelconque, la différence des résolvantes $T_{M,V}(s(1-s))$ opère à l'intérieur de $L^{2,a}(M)$ et y est traçable avec même trace que dans $L^2(M)$. Fixant a, on peut prolonger méromorphiquement la trace

$$\tau_{M,V}(s) = \operatorname{tr}_{L^{2,a}(M)} T_{M,V}(s(1-s))$$

à $\{\Re es > -a\}$. La proposition A est ainsi démontrée. Q.E.D.

§2. Fonctions et coefficients d'Eisenstein

2.1. Le théorème 1.1 et le lemme 1.2 permettent de poser la définition :

Définition 2.1. Pour $s \in \{\Re es > 1/2\}$ et $m_\infty \in M(\infty)$, la fonction d'Eisenstein est définie par

$$E_M(s, m_\infty)(m) = \lim_{m' \to m_\infty} R_M(s, m', m)\rho(m')^{\mathrm{rg}(m')-s}.$$

D'après le théorème 1.1, les fonctions d'Eisenstein $E_M(s, m_\infty)$ admettent un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.

Remarque 2.1. Il serait plus honnête de noter par E_M^ρ ces fonctions d'Eisenstein, afin de ne pas gommer leur dépendance vis–à–vis de ρ. L'abus, sans conséquence, sera constant dans la suite (*cf.* remarque 2.3).

Remarque 2.2. Dans le cas où M est hyperbolique (*ie.* $M = \mathbf{H}^2/\Gamma$ pour un groupe Γ d'isométries de $\mathbf{H}^2$), ces fonctions E_M coïncident, à un facteur dépendant de s près, avec les séries d'Eisenstein, moyennes sur le groupe Γ (ou un ensemble de classes) de translatées de la fonction propre y^s sur $\mathbf{H}^2$. On retrouve trace de ce facteur dans les mesures (en s) intervenant dans les représentations spectrales (*cf.* proposition 2.2).

2.2.

Proposition 2.1. *Sur $M(\infty)_1$, notons $d\overline{\sigma}^\rho$ la 1–forme volume induite par le prolongement de la métrique $\rho^2 dg^2$ à $M \cup M(\infty)_1$. Pour $s \notin \mathcal{P}_M \cup 1 - \mathcal{P}_M$, on a la formule (dite) de Green*

$$R_M(s, m, m') - R_M(1-s, m, m') = (1-2s)\int_{M(\infty)} E_M(s, m_\infty)(m) E_M(1-s, m_\infty)(m') d\overline{\sigma}^\rho(m_\infty). \tag{2.1}$$

L'intégrale sur $M(\infty)_0$ note en fait une somme sur les différentes pointes.

Preuve. Par la formule de Green,

$$\int_{S_\varepsilon(m)\cup S_\varepsilon(m')\cup\Sigma_t} [R_M(s, z, m)\partial_n R_M(1-s, z, m') - \partial_n R_M(s, z, m) R_M(1-s, z, m') d\sigma = 0$$

où $S_\varepsilon(m)$ est la sphère de rayon ε centrée en m, $\Sigma_t = \{\rho = t\}$ et ∂_n est la dérivation par rapport au vecteur unitaire normal (pointant vers m sur $S_\varepsilon(m)$ et vers l'infini sur Σ_t). Lorsque $\varepsilon \to 0$, les intégrales sur les sphères se réduisent à

$$R_M(s, m, m') - R_M(1-s, m, m').$$

En ce qui concerne l'intégrale sur Σ_t lorsque $t \to 0^+$, nous distinguons suivant les composantes de $M(\infty)$.

Sur une pointe p (avec $p(\infty) = m_\infty$) lue à travers des coordonnées normales, on a $\Sigma_t = \{y = t^{-1}\}$, $\partial_n = y\partial_y$, $d\sigma = dx/y$ et l'asymptotique $R_M(s,z,m) \sim E_M(s,m_\infty)(m)y^{1-s}$ (dérivable). On en déduit la contribution

$$(2s-1)E_M(s,m_\infty)(m)E_M(1-s,m_\infty)(m')$$

de la pointe p au membre de droite de (2.1) lorsque $t \to 0$.

Sur un entonnoir e, en coordonnées (x,ρ) avec la fonction ρ précédente (il suffit clairement d'établir le résultat pour une fonction ρ particulière définissant le bord $e(\infty)$), on a $\Sigma_t = \{y/x = t\}$, $\partial_n = -\rho\sqrt{1+\rho^2}\partial_\rho + \rho^2\sqrt{1+\rho^2}x\partial_x$, $d\overline{\sigma}^\rho = dx/x$, $d\sigma = \sqrt{1+\rho^2}/\rho d\overline{\sigma}^\rho$ et $R_M(s,z,m) \sim_{z\to m_\infty} E_M(s,m_\infty)(m)\rho(z)^s$ (asymptotique dérivable), d'où on déduit la contribution

$$(2s-1)\int_{e(\infty)} E_M(s,m_\infty)(m)E_M(1-s,m_\infty)(m')dx/x.$$

La forme $d\overline{\sigma}^\rho$ est égale à dx/x, ce qui achève la preuve de la proposition.
Q.E.D.

Remarque 2.3. Considérer les fonctions d'Eisenstein comme des sections du fibré $\Lambda^s M(\infty)$ des s–densités sur $M(\infty)$ permet d'alléger l'écriture et de manipuler des fonctions/sections d'Eisenstein indépendantes du choix de ρ (du moins sur $M(\infty)_1$). Ce fibré est trivial et le choix de ρ détermine, via la section $|d\overline{\sigma}^\rho(m_\infty)|^s$, une bijection entre l'espace de sections $\mathcal{C}(\Lambda^s M(\infty))$ ($L^2(\Lambda^s M(\infty))$ *resp.*) et $\mathcal{C}^\infty(M(\infty))$ ($L^2(M(\infty), d\overline{\sigma}^\rho)$ *resp.*). Le produit d'une α–densité et d'une β–densité est une $(\alpha+\beta)$–densité et l'intégrale d'une 1–densité est bien définie sur la courbe $M(\infty)_1$. Si φ, ψ sont des s–densités avec s dans $1/2 + i\mathbf{R}$, $\overline{\psi}$ est une $(1-s)$–densité, $\varphi\overline{\psi}$ une 1–densité, dont l'intégration définit le produit scalaire $\langle \varphi, \psi\rangle_{M(\infty)} = \int_{M(\infty)} \varphi\overline{\psi}$. A la définition 2.1, on substituera parfois la définition suivante, dans laquelle $E_M(s,m_\infty)$ est indépendante du choix de ρ sur $M(\infty)_1$. On y verra évidemment la convention $|d\overline{\sigma}^\rho(m_\infty)| = 1$ si m_∞ est une pointe.

Définition 2.2. Pour $s \in \{\Re es > 1/2\}$, la fonction d'Eisenstein est la fonction sur M, à valeurs dans $\mathcal{C}(\Lambda^s(M(\infty)))$, définie par

$$E_M(s)(m) = \lim_{m'\to m_\infty} R_M(s,m',m)\rho(m')^{\mathrm{rg}(m')-s}|d\overline{\sigma}^\rho(m_\infty)|^s.$$

La suite considérera souvent implicitement des s–densités. Par exemple, le noyau $\mathcal{C}_M(s, n_\infty, m_\infty)$ définit un opérateur $\mathcal{C}_M$ de $\mathcal{C}(\Lambda^s M(\infty))$ dans $\mathcal{C}(\Lambda^{1-s} M(\infty))$ dont l'équation fonctionnelle apparaît dans le corollaire 2.6. La formule de Green (2.1) s'écrit simplement ainsi

$$\begin{aligned} &R_M(s,m,m') - R_M(1-s,m,m') \\ =&(1-2s)\int_{M(\infty)} E_M(s)(m)E_M(1-s)(m'). \end{aligned} \tag{2.1'}$$

2.3.

Proposition 2.2. *L'application $\mathcal{F}_M$ qui à $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ associe la fonction méromorphe $\int_M E_M(s)(m)\varphi(m)d(m) \in \Lambda^s(M(\infty))$, induit une isométrie du sous–espace d'absolue continuité de Δ_M sur $L^2(1/2+i\mathbf{R}^+, L^2(\Lambda^s M(\infty)), |(2s-1)^2 ds|/\pi)$, qui est une représentation spectrale : $\mathcal{F}_M \Delta_M = \int_{1/2+i\mathbf{R}^+} s(1-s)\mathcal{F}_M$.*

Preuve. Soit $\{\mathcal{E}_M(\lambda)\}$ la résolution spectrale de Δ_M et A un ouvert de $\mathbf{R}^+$ tel que $a = \{s \in 1/2 + i\mathbf{R}^+, s(1-s) \in A\}$ ne rencontre pas $\mathcal{P}_M$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} \int_{\lambda\in A} |\mathcal{E}_M(\lambda)\varphi|^2 d\lambda &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (i\pi)^{-1}\int_A \langle (\Delta_M - \mu)^{-1}]_{\lambda-i\varepsilon}^{\lambda+i\varepsilon}\varphi, \varphi\rangle d\lambda \\ &= (i\pi)^{-1}\int_{s\in a}\int_{M\times M} R_M(\sigma,m,m')]_s^{1-s}\varphi(m')\overline{\varphi(m)}dm'dm|(1-2s)ds| \\ &= \int_{s\in a}\int_{M(\infty)}\left|\int_M E_M(s)(m)\varphi(m)dm\right|^2 |(1-2s)^2 ds|/\pi \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de Green (2.1) ; ainsi

$$\int_{\lambda\in A} |\mathcal{E}_M(\lambda)\varphi|^2 d\lambda = \int_{s\in a}\int_{M(\infty)} |\mathcal{F}_M\varphi|^2 |(1-2s)^2 ds|/\pi$$

Pour montrer la surjectivité de $\mathcal{F}_M$, il suffit de montrer que pour presque tout s, l'application

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M) \to \int_M E_M(s, m_\infty)(m)\varphi(m)dm$$

est d'image dense dans $L^2(M(\infty), d\overline{\sigma}^\rho)$. Prolongeons $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M(\infty))$ sur un voisinage de $M(\infty)$ par une fonction constante sur les normales à $M(\infty)_1$ et sur chaque pointe. Si $u(s)$ coïncide avec $\chi\rho^{s-\mathrm{rg}}\varphi$ au voisinage de $M(\infty)$, la fonction $v(s) = (\Delta - s(1-s))u(s)$ est à support compact sur les pointes et s'annule à l'ordre $s+2$ sur le bord à l'infini des entonnoirs. L'égalité

$$\int_M R_M(s,m',m)v(s)(m)dm = u(s)(m'), \Re es > 1/2$$

se prolonge à $s \in a$ et, en prenant les asymptotiques des deux membres lorsque $m' \to m_\infty$, on obtient

$$\int_M E_M(s,m_\infty)(m)v(s)(m)dm = \varphi(m_\infty).$$

La densité de $\int_M E_M(s)\mathcal{C}_0^\infty(M)dm$ dans $L^2(\Lambda^s M(\infty))$ en résulte.

Q.E.D.

Proposition 2.3. *Pour $s \notin \mathcal{P}_M \cup 1-\mathcal{P}_M$, $\Re es \in (0,1)$,*

$$E_M(s,m_\infty) = \frac{\rho^{1-s-\mathrm{rg}}}{2s-1}\delta_{n_\infty}(m_\infty) - \frac{\rho^{s-\mathrm{rg}}}{2s-1}\mathcal{C}_M(1-s,\cdot,m_\infty) + o(\rho^s).$$

Le noyau $\mathcal{C}_M(s,n_\infty,m_\infty), n_\infty, m_\infty \in M_\infty$ définit un opérateur pseudo–différentiel d'ordre $2\Re es - 1$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.

Remarque 2.4. Cette proposition décrit le comportement à l'infini de $E_M(s,m_\infty)$. Il est singulier sur le bord $M(\infty)_1$ et cet asymptotique doit être considéré au sens faible : sur l'entonnoir e, la restriction de $E_M(s,m_\infty)$ à la courbe $\{\rho = t\}$, difféomorphe à $e(\infty)_1$, est identifiée à une distribution de $e(\infty)_1$, dont le développement donné par la proposition contient une masse de Dirac.

Preuve. D'après le théorème 1.1, $E_M(s,m_\infty)(m)\rho(m)^{\mathrm{rg}(m)-s}$ se prolonge de manière lisse à $M(\infty)\times\overline{M}$, privé de la diagonale de $M(\infty)\times M(\infty)$.

Si m_∞ est une pointe, alors, d'après le lemme 1.2(ii),

$$E_M(s,m_\infty)(m) = \frac{\rho(m)^{-s}}{2s-1} + a(m_\infty)\rho(m)^{s-1}(1+o(\rho)) \quad , \quad m \to m_\infty$$

où

$$a(m_\infty) = K_M(s,m,m')(\rho(m)\rho(m'))^{1-s}_{|m=m'=m_\infty}.$$

Sur la diagonale de $M(\infty)_1\times M(\infty)_1$, le prolongement de $E_M(s,m_\infty)$ est singulier, de singularité coïncidant avec celle donnée par le prolongement de la résolvante sur le cylindre hyperbolique, identique à celle de la résolvante sur le plan hyperbolique, soit en coordonnées normales

$$\frac{c_2(s)4^s x^s x_\infty^s \rho^s}{(|x-x_\infty|^2+x^2\rho^2)^s}.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(e(\infty))$, à support au voisinage de x_∞,

$$\begin{aligned} I(x_\infty,\varphi,\rho) &= \int \frac{x^s x_\infty^s \varphi(x)}{(|x-x_\infty|^2+x^2\rho^2)^s} d\overline{\sigma}^\rho(x) \\ &= \int \frac{(1+v)^{s-2}\varphi(x_\infty(1+v)^{-1})}{(|v|^2+\rho^2)^s} dv \end{aligned}$$

a un comportement pour $\rho \sim 0$ donné par le lemme :

Lemme 2.4. *Dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $(u^2+t^2)^{-s}$ a un développement asymptotique en puissances de t au voisinage de $t=0$, méromorphe en $s \in \mathbf{C}$. En particulier, pour $\Re es < 1$*

$$(|u|^2+t^2)^{-s} \underset{t\to 0}{\sim} |u|^{-2s} + t^{1-2s}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\sqrt{\pi}\delta(u) + o(1), \tag{2.2}$$

où la distribution $|u|^{-2s}$ est définie par prolongement méromorphe à partir de $\{\Re es > -1/2\}$.

Le prolongement du noyau $\mathcal{C}_M(s,n_\infty,m_\infty)$, résulte du théorème 1.1 et du développement de la partie singulière du noyau donnée dans le lemme 2.4 : ce noyau détermine un opérateur pseudo–différentiel (dépendance holomorphe en s) d'ordre $2\Re es - 1$. Q.E.D.

Preuve du lemme. On a pour $\Re e 2s > 1$,

(2.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{1/t}(1+v^2)^{-s}dv &= \int_0^\infty (1+v^2)^{-s}dv - \int_{1/t}^\infty (1+v^2)^{-s}dv \\ &= \gamma(s)/2 + t^{2s-1}\{(1-2s)^{-1} + r(s,t)\} \end{aligned}$$

où $\gamma(s) = \sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)/\Gamma(s)$ et le reste $r(s,t) = t^{1-2s}\int_{1/t}^\infty v^{-2s}[1-(1+v^{-2})^{-s}]dv$ est nul en $t=0$ avec un développement asymptotique, valable aussi pour le prolongement méromorphe en $s \in \mathbf{C}$ que donne l'écriture

(2.3). On en déduit pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \varphi(u)(u^2+t^2)^{-s}du = &\int_{|u|\leq 1} [\varphi(u)-\varphi(0)](u^2+t^2)^{-s}du \\ &+\varphi(0)[2(1-2s)^{-1}+\gamma(s)t^{1-2s}+2r(s,t)] \\ &+\int_{|u|\geq 1} \varphi(u)(u^2+t^2)^{-s}du.\end{aligned}$$

On en déduit (2.2) sur $\{\Re es < -1\}$. Pour montrer l'existence du développement à l'ordre n, valable sur le demi–plan $\{\Re es < n\}$, on reprend la décomposition de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} \varphi(u)(u^2+t^2)^{-s}du$ en y introduisant le terme

$$\int_{|u|\leq 1} [\varphi(u) - \sum_{i\leq N} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} u^i](u^2+t^2)^{-s}du$$

avec un N suffisament grand. Q.E.D.

Les fonction d'Eisenstein sont caractérisées par le lemme suivant

Lemme 2.5. *Soit $m_\infty \in M(\infty)$, porté par le bout b. Soit χ_b une fonction à support dans un voisinage de $b(\infty)$, valant 1 au voisinage de $b(\infty)$. Soit M' une variété du même type que M, isométrique à M sur un voisinage de l'infini de m_∞ ($M' = b$ ou $M \setminus V$ par exemple) et $E_{M'}(s, m_\infty)$ la fonction d'Eisenstein correspondante.*

(i) *$E_M(s, m_\infty)$ est caractérisée par l'ensemble des propriétés suivantes :*

(a) *$E_M(s, m_\infty)$ est méromorphe sur* $\mathbf{C}$,

(b) $(\Delta - s(1-s))E_M(s, m_\infty) = 0$,

(c) $E_M(s, m_\infty) - \chi_b E_{M'}(s, m_\infty) \in L^2(M), \Re es > 1/2$.

(ii) *Sur $\{\Re es > 1/2\}$, on a*

(2.4)

$$E_M(s, m_\infty) = \chi_b E_{M'}(s, m_\infty) - (\Delta_M - s(1-s))^{-1}([\Delta, \chi_b]E_{M'}(s, m_\infty))$$

Preuve. La propriété (c) résulte du comportement à l'infini des fonctions d'Eisenstein décrit dans la proposition 2.4 : si $\Re es > 1/2$, la contribution non de carré intégrable au voisinage de m_∞ ne dépend que de la composante de $M(\infty)$ contenant m_∞. Si deux fonctions vérifient (b) et (c), alors leur différence, L^2 pour $\Re es > 1/2$, est une fonction propre du laplacien positif Δ_M avec valeur propre négative, donc nulle. L'équation (2.4) qui en résulte est aussi valable pour tout s, car $[\Delta, \chi_b]E_b(s, m_\infty)$ est à support compact (méromorphe en s) et le noyau de la résolvante se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}$. Q.E.D.

Définition 2.3. *Le noyau $\mathcal{C}_M(s, n_\infty, m_\infty), m_\infty, n_\infty \in M(\infty)$ est dit coefficient d'Eisenstein et sera considéré comme représentant un opérateur de $\mathcal{C}(\Lambda^s M(\infty))$ dans $\mathcal{C}(\Lambda^{1-s} M(\infty))$.*

Corollaire 2.6. *On a les équations fonctionnelles*

$$\begin{aligned} &E_M(s) = \mathcal{C}_M(1-s) E_M(1-s) \\ &\mathcal{C}_M(s)\mathcal{C}_M(1-s) = 1. \end{aligned}$$

Preuve. Par méromorphie, il suffit de montrer ces équations fonctionnelles pour s de partie réelle dans $(0,1)$, hors de $\mathcal{P}_M \cup 1 - \mathcal{P}_M$. Reprenons la formule de Green de la proposition 2.1. Lorsque $m \to n_\infty$, le membre de gauche est équivalent à

$$\rho(m)^{s-\mathrm{rg}(m)} E_M(s, n_\infty)(m') - \rho(m)^{1-s-\mathrm{rg}(m)} E_M(1-s, n_\infty)(m')$$

et le membre de droite à

$$\begin{aligned} \rho(m)^{s-\mathrm{rg}(m)} \int_{M(\infty)} & E_M(1-s, m_\infty)(m') \mathcal{C}_M(1-s, n_\infty, m_\infty) d\overline{\sigma}^\rho(m_\infty) \\ & - \rho(m)^{1-s-\mathrm{rg}(m)} E_M(1-s, n_\infty)(m') \end{aligned}$$

On en déduit

$$E_M(s, n_\infty) = \int_{M(\infty)} E_M(1-s, m_\infty) \mathcal{C}_M(1-s, m_\infty, n_\infty) d\overline{\sigma}^\rho(m_\infty)$$

soit

$$E_M(s) = \mathcal{C}_M(1-s) E_M(1-s)$$

puis

$$E_M(s) = \mathcal{C}_M(s)\mathcal{C}_M(1-s) E_M(s).$$

D'après la proposition 2.2, $E_M(s)\mathcal{C}_0^\infty(M)$ est dense dans $L^2(\Lambda^s M(\infty))$ pour presque tout $s \in 1/2 + i\mathbf{R}^+$, la deuxième équation fonctionnelle en résulte. Q.E.D.

§3. Opérateurs d'onde et matrice de diffusion

Proposition 3.1. *Les opérateurs d'onde*

$$W_\pm = \mathrm{slim}_{t \to \pm\infty} e^{it\Delta_M} e^{-it\Delta_{M \setminus V}} P_{\mathrm{ac}}(\Delta_{M \setminus V})$$

existent et réalisent une isométrie entre les sous–espaces d'absolue continuité de Δ_M *et* $\Delta_{M\setminus V}$:

$$W_+\mathcal{F}^*_{M\setminus V} = \mathcal{F}^*_M \quad , \quad W_-\mathcal{F}^*_{M\setminus V} = \mathcal{F}^*_M \int_{1/2+i\mathbf{R}^+} \mathcal{C}_M(s)^*\mathcal{C}_{M\setminus V}(1-s)^*.$$

La matrice de diffusion $\mathcal{S}_{M,V}(\lambda)$ *diagonalisant l'opérateur de diffusion* $W_-^*W_+$ *dans une représentation spectrale de* Δ_M *est unitairement équivalente à*

$$\int_{1/4}^{\infty} \mathcal{C}_{M\setminus V}(s(\lambda))^{-1}\mathcal{C}_M(s(\lambda))$$

avec $s(\lambda) = 1/2 + i\sqrt{\lambda - 1/4}$ *où* $\sqrt{}$ *note la racine carrée positive sur* $\mathbf{R}^+$.

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(1/2 + i\mathbf{R}^+ \setminus \mathcal{P}_M, \mathcal{C}(\Lambda^s M(\infty)))$. Notons par $d\mu(s)$ la mesure $|(1-2s)^2 ds|/2\pi$ sur $\{s \in 1/2 + i\mathbf{R}^+\}$, de telle manière que

$$\mathcal{F}^*_M\psi = \int_{1/2+i\mathbf{R}^+} \langle \psi(s), E_M(s)\rangle_{M(\infty)} d\mu(s).$$

Soient θ une fonction régulière à support compact et D_s l'opérateur différentiel $D_s = i\partial_s(2s-1)^{-1}$. Après intégrations par parties

$$\begin{aligned}&\theta e^{-it\Delta_{M\setminus V}}\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi \\ &= t^{-n}\int_{1/2+i\mathbf{R}^+} e^{-its(1-s)}\theta\ D_s^n\langle\psi(s), E_{M\setminus V}(s)\rangle_{M(\infty)} d\mu(s)\end{aligned}$$

et donc, dans $L^2(M)$,

$$e^{it\Delta_M}\theta e^{-it\Delta_{M\setminus V}}\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi = o(|t|^{-\infty}) \quad , \quad |t| \to \infty$$

vu la compacité du support de l'intégrant.

Soit χ une fonction régulière sur M à support dans $M \setminus V$, constante égale à 1 au voisinage de l'infini. On a ainsi

$$\begin{aligned}W_\pm\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi &= \lim_{t\to\pm\infty} e^{it\Delta_M}\chi e^{-it\Delta_{M\setminus V}}\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi \\ &= \chi\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi + \lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\pm(\varepsilon,\psi)\end{aligned}$$

avec

$$I_\pm(\varepsilon,\psi) = i\int_0^{\pm\infty} e^{i(\Delta_M \pm i\varepsilon)t}[\Delta,\chi]e^{-it\Delta_{M\setminus V}}\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi dt$$

où l'intégrale est uniformément convergente par rapport à ε.

$$\begin{aligned}
&I_\pm(\varepsilon,\psi)\\
&= i\int_0^{\pm\infty}\int_{1/2+i\mathbf{R}^+} e^{i(\Delta_M\pm i\varepsilon)t}[\Delta,\chi]e^{-its(1-s)}\langle\psi(s),E_{M\setminus V}(s)\rangle_{M(\infty)}d\mu(s)dt\\
&= -\int_{1/2+i\mathbf{R}^+}(\Delta_M - s(1-s)\pm i\varepsilon)^{-1}([\Delta,\chi]\langle\psi(s),E_{M\setminus V}(s)\rangle_{M(\infty)})d\mu(s)
\end{aligned}$$

D'après la caractérisation du lemme 2.5, on a

$$E_M(s) = \chi E_{M\setminus V}(s) - (\Delta_M - s(1-s))^{-1}([\Delta,\chi]E_{M\setminus V}(s))$$

ainsi, pour $s = 1/2 + i\varepsilon t, t > 0, \varepsilon = \pm 1$,

$$\begin{aligned}
E_M(s) = &\chi E_{M\setminus V}(s)\\
&- \lim_{\alpha\to 0^+}(\Delta_M - s(1-s) - i\varepsilon\alpha)^{-1}([\Delta,\chi]E_{M\setminus V}(s)).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour W_+, on obtient

$$\begin{aligned}
W_+\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi &= \chi\mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi\\
&\quad - \int_{1/2+i\mathbf{R}^+}\langle\psi(s),\big[\chi E_{M\setminus V}(s) - E_M(s)\big]\rangle_{M(\infty)}d\mu(s)\\
&= \int_{1/2+i\mathbf{R}^+}\langle\psi(s),E_M(s)\rangle_{M(\infty)}d\mu(s)\\
&= \mathcal{F}^*_M\psi.
\end{aligned}$$

Pour W_-, utilisons d'abord l'équation fonctionnelle sur $M\setminus V$ transformant $I_-(\varepsilon,\psi)$ en

$$\begin{aligned}
-\int_{1/2+i\mathbf{R}^+}&(\Delta_M - s(1-s) - i\varepsilon)^{-1}\\
&([\Delta,\chi]\langle\psi(s),\mathcal{C}_{M\setminus V}(1-s)E_{M\setminus V}(1-s)\rangle_{M(\infty)})d\mu(s)
\end{aligned}$$

puis l'expression (3.1) des fonctions d'Eisenstein E_M

$$\begin{aligned}
&I_-(0^+,\psi) =\\
&-\int_{1/2+i\mathbf{R}^+}\langle\psi(s),\mathcal{C}_{M\setminus V}(1-s)\big[\chi E_{M\setminus V}(1-s) - E_M(1-s)\big]\rangle_{M(\infty)}d\mu(s)
\end{aligned}$$

et l'équation fonctionnelle de E_M

$$\begin{aligned} W_- \mathcal{F}^*_{M\setminus V}\psi &= \int_{1/2+i\mathbf{R}^+} \langle \psi(s), \mathcal{C}_{M\setminus V}(1-s)\mathcal{C}_M(s)E_M(s)\rangle_{M(\infty)} d\mu(s) \\ &= \int_{1/2+i\mathbf{R}^+} \langle \mathcal{C}_M(s)^*\mathcal{C}_{M\setminus V}(1-s)^*\psi(s), E_M(s)\rangle_{M(\infty)} d\mu(s) \\ &= \mathcal{F}^*_M \mathcal{C}_M(s)^*\mathcal{C}_{M\setminus V}(1-s)^*\psi. \end{aligned}$$

L'expression de la matrice de diffusion en résulte. Q.E.D.

§4. La formule de Krein

4.1. Commençons par rappeler comment KREIN donne une formule de trace pour les perturbations auto–adjointes à trace d'un opérateur auto–adjoint borné ([8]).

Soient A, B autoadjoints, bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tels que $A-B$ soit à trace. Le déterminant $\det[1+(B-A)(A-\Lambda)^{-1}]$ est nul à l'infini et non nul sur $\{\Im m\Lambda > 0\}$. En prenant la détermination principale pour l'argument Arg ($\operatorname{Arg} 1 = 0$), KREIN démontre le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soient A, B autoadjoints, bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tels que $A - B$ soit à trace. La valeur au bord*

$$\xi(A, B, \lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{Arg} \det[1 + (B - A)(A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}]$$

existe presque partout, avec convergence dans L^1.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, l'opérateur $\varphi(A) - \varphi(B)$ est à trace et

$$\operatorname{tr}[\varphi(A) - \varphi(B)] = \int_{\mathbf{R}} \xi(A, B, \lambda)\varphi'(\lambda) d\lambda.$$

4.2. Avec les hypothèses précédentes, KATO a développé une théorie de la diffusion non stationnaire pour le couple (A, B). Soit $P_{\mathrm{ac}}(A)$ la projection sur le sous–espace d'absolue continuité (noté $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$). Les opérateurs d'onde $W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itB}e^{-itA}P_{\mathrm{ac}}(A)$ existent et sont complets au sens où ils réalisent un isomorphisme isométrique entre les sous–espaces $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(B)$. L'opérateur de diffusion $S = W_+W_-^*$ se diagonalise en l'intégrale hilbertienne de matrices de diffusion $\int_{\sigma_{\mathrm{ac}}(A)} \mathcal{S}(A, B, \lambda)$ dans une représentation spectrale $\int_{\sigma_{\mathrm{ac}}(A)} \mathcal{H}(\lambda) d\mu(\lambda)$ de $A_{|\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)}$. KATO établit de plus que la matrice $\mathcal{S}(A, B, \lambda)$ est une perturbation à trace de l'identité, dont le déterminant est exprimé par BIRMAN ([2]) en terme de la fonction spectrale de KREIN suivant :

Théorème 4.2. *μ-presque partout sur $\sigma_{\mathrm{ac}}(A)$,*

$$\det \mathcal{S}(A,B,\lambda) = \exp(-2i\pi\xi(A,B,\lambda)).$$

Birman formule aussi une propriété d'invariance pour les opérateurs d'onde, qui se reflète dans la matrice de diffusion par la proposition :

Théorème 4.3. *Soit ψ une fonction monotone croissante sur le spectre absulument continu de A. Alors*

$$\det \mathcal{S}(\psi(A),\psi(B),\psi(\lambda)) = \det \mathcal{S}(A,B,\lambda).$$

4.3. Soit $E<0$. D'après la proposition A, la résolvante $(\Delta_M - E)^{-1}$ est une perturbation à trace de $(\Delta_{M\setminus V} - E)^{-1}$.

Lemme 4.4. *La dérivée logarithmique de la fonction*

$$\begin{aligned} D_E(s) = \det\big[1 + ((\Delta_M - E)^{-1} - (\Delta_{M\setminus V} - E)^{-1}) \\ \big((\Delta_{M\setminus V} - E)^{-1} - (s(1-s) - E)^{-1}\big)^{-1}\big] \end{aligned}$$

(définie et holomorphe sur $\{\Re es > 1\}$) est égale à

$$(2s-1)\,\mathrm{tr}\big[R_{\Delta_{M\setminus V}}(s(1-s)) - R_{\Delta_M}(s(1-s))\big].$$

et admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.

Preuve. Notons par $R_H(z)$ la résolvante $(H-z)^{-1}$ et $d_{A,B}(\lambda)$ le déterminant $\det[1+(B-A)R_A(\lambda)]$. Avant d'appliquer la formule

$$\frac{d}{d\lambda}\log d_{A,B}(\lambda) = \mathrm{tr}\big[R_B(\lambda)(B-A)R_A(\lambda)\big]$$

aux données $A = R_{\Delta_{M\setminus V}}(E)$, $B = R_{\Delta_M}(E)$ et $\lambda = (\alpha - E)^{-1}$, simplifions l'opérateur $\mathcal{O} = (\alpha - E)^{-2} R_B(\lambda)(B-A)R_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= (\Delta_M - E)R_{\Delta_M}(\alpha)(R_{\Delta_M}(E) - R_{\Delta_{M\setminus V}}(E))(\Delta_{M\setminus V} - E)R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) \\ &= R_{\Delta_M}(\alpha)(\Delta_{M\setminus V} - E)R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) - (\Delta_M - E)R_{\Delta_M}(\alpha)R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) \\ &= R_{\Delta_M}(\alpha)((\alpha - E)R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) - 1) - ((\alpha - E)R_{\Delta_M}(\alpha) - 1)R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) \\ &= R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) - R_{\Delta_M}(\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{d}{d\alpha}\log D_{R_{\Delta_{M\setminus V}}(E), R_{\Delta_M}(E)}((\alpha - E)^{-1}) = -\,\mathrm{tr}\big[R_{\Delta_{M\setminus V}}(\alpha) - R_{\Delta_M}(\alpha)\big].$$

soit :

$$d_E(s) = \frac{d}{ds} \log D_E(s) = (2s-1)\,\mathrm{tr}\left[R_{\Delta_{M\setminus V}}(s(1-s)) - R_{\Delta_M}(s(1-s))\right],$$

trace admettant un prolongement méromorphe d'après la proposition A. Q.E.D.

Lemme 4.5. *Soit ξ_E la fonction de déphasage spectral associée au couple $((\Delta_M - E)^{-1}, (\Delta_{M\setminus V} - E)^{-1})$. La fonction η_E définie par $\eta_E(\alpha) = \xi_E((\alpha - E)^{-1})$ sur $\mathbf{R}^+$ ne dépend pas de E, est analytique sur $\mathbf{R}^+$, privé d'un ensemble discret sur lequel elle a des limites à droite et à gauche, de différence entière.*

Preuve. Soit δ_E la fonction définie sur $B = [1/2, 1] \cup 1/2 + i\mathbf{R}_+^*$ par $\delta_E(\sigma) = \eta_E(\sigma(1-\sigma))$. δ_E est la valeur au bord de $1/\pi \operatorname{Arg} D_E(s)$ définie sur $\{\Re es > 1/2, \Im ms > 0\}$. Vu que la dérivée logarithmique de $D_E(s)$ admet un prolongement méromorphe (indépendant de E) à $\mathbf{C}$, δ_E (qui ne dépend pas de E, on omettra son indice) est continue sur B à l'exception d'un ensemble discret $\mathcal{D}$ (les pôles de D'_E/D_E), où elle admet cependant des limites à droite et à gauche (si le pôle est simple, sinon elle n'est pas localement intégrable, ce qui est exclus). En un point de $\mathcal{D} \cap 1/2 + i\mathbf{R}_+^*$, le saut de δ est entier car $\exp(2i\pi\delta(\sigma))$ est égal à la fonction continue $\det \mathcal{S}_{M,V}(\sigma(1-\sigma))$; ceci implique que les pôles du prolongement méromorphe de D'_E/D_E situés sur $1/2 + i\mathbf{R}$ sont simples, avec résidus entiers (ce qui n'était pas évident *a priori*). D'autre part $\det \mathcal{S}_{M,V}(1/4^+) = \pm 1$ et η est à valeurs entières sur $[0, 1/4]$ (avec sauts aux valeurs propres de $\Delta_M, \Delta_{M\setminus V}$ correspondant aux multiplicités), ce qui entraîne aussi l'intégralité du saut de η en $1/4$. Q.E.D.

4.4. Il s'agit maintenant de rassembler les différents résultats énoncés précédemment pour terminer la preuve de la proposition B.

Les opérateurs $\mathcal{C}_M(s)$ et $\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)$ ont exactement même partie singulière, ainsi $\mathcal{C}_M(s)^{-1}\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)$ est–il une perturbation de l'identité par un opérateur régularisant, *ie.* traçable, avec dépendance méromorphe.

Appliquons la formule de Krein à une fonction $\varphi_{E,s}, \Re es >\cdot 1$ régulière à support compact telle que $\varphi_{E,s}(u) = (u^{-1} + E - s(1-s))^{-1}$ sur $[0, E^{-1}]$. La fonction ξ_E est nulle en dehors de l'intervalle $[0, (-E)^{-1}]$.

On a donc, pour $\Re es > 1$,

$$\operatorname{tr}\left[R_{\Delta_M}(s(1-s)) - R_{\Delta_{M\setminus V}}(s(1-s))\right] = \int_0^{-E^{-1}} \xi_E(\lambda)\varphi'_{E,s}(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \xi_E((\alpha-E)^{-1})\frac{d}{d\alpha}\varphi_{E,s}((\alpha-E)^{-1})d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \eta(\alpha)d[(\alpha - s(1-s))^{-1}]$$

$$= \sum_{\lambda<1/4} \frac{m_{\lambda,M,V}}{\lambda - s(1-s)} + \sum_{R>\mu\geq 1/4} \frac{m_\mu}{\mu - s(1-s)}$$

$$+ \frac{\eta(R)}{R - s(1-s)} + \int_R^\infty \eta(\lambda)d[(\lambda - s(1-s))^{-1}]$$

$$+ \int_{1/4}^R \frac{d}{d\lambda}\frac{\log\det \mathcal{S}_{M,V}(\lambda)}{2i\pi}\frac{d\lambda}{\lambda - s(1-s)}$$

La première somme porte sur l'ensemble fini $(\lambda)_{\lambda<1/4}$ des valeurs propres (de multiplicité $m_{\lambda,M}, m_{\lambda,M\setminus V}$; on a $m_{\lambda,M,V} = m_{\lambda,M} - m_{\lambda,M\setminus V} = \Delta\eta(\lambda)$) des laplaciens $\Delta_M, \Delta_{M\setminus V}$ dans l'intervalle $(0, 1/4)$, la seconde sur l'ensemble (μ, m_μ) des discontinuités de η avec saut $\Delta\eta(\mu) = m_\mu$ (qui correspondent aux pôle/zéros ρ de $\tau_{M,V}(s)$ sur $\{\Re es = 1/2\}$ via $\mu = \rho(1-\rho)$).

Avant de transformer la dernière intégrale $I_R(s)$, rappelons que, d'après la proposition 3.1, les opérateurs

$$\mathcal{S}_{M,V}(\lambda) \text{ et } \mathcal{C}_{M\setminus V}(s(\lambda))^{-1}\mathcal{C}_M(s(\lambda))$$

sont unitairement équivalents. Notons

$$\varepsilon_{M,V}(s) = \log\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)^{-1}\mathcal{C}_M(s)].$$

D'après l'équation fonctionnelle des coefficients d'Eisenstein, la dérivée

$d_u[\varepsilon_{M,V}(1/2+iu)]$ est paire. Ainsi, en posant $\tilde{R}=\sqrt{R-1/4}$,

$$\begin{aligned}
I_R(s) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\tilde{R}} \frac{d\varepsilon_{M,V}}{d\zeta}(1/2+iu)\frac{idu}{u^2+(s-1/2)^2} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\tilde{R}} \frac{d\varepsilon_{M,V}}{d\zeta}(1/2+iu)\Big(\frac{1}{s-(1/2+iu)} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{s-(1/2-iu)}\Big)\frac{idu}{2s-1} \\
&= \frac{1}{2s-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\tilde{R}}^{1/2+i\tilde{R}} \frac{d\varepsilon_{M,V}}{d\zeta}(\zeta)\frac{d\zeta}{s-\zeta} \\
&= \frac{1}{2s-1}\Big[\sum_{(\tilde{R})}\frac{m_\rho}{s-\rho} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\tilde{R}}} \frac{d\varepsilon_{M,V}}{d\zeta}(\zeta)\frac{d\zeta}{s-\zeta}\Big]
\end{aligned}$$

On a désigné par $\Gamma_{\tilde{R}}$ le demi-cercle $\Gamma_{\tilde{R}}=\{1/2+i\tilde{R}e^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi\}$ et la somme porte sur l'ensemble $\{\rho, m_\rho\}$ des pôles et zéros de $\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)^{-1}\mathcal{C}_M(s)]$ dans le demi-disque borné par $\Gamma_{\tilde{R}}\cup 1/2+[-i\tilde{R}, i\tilde{R}]$. En faisant $R\to\infty$, on retrouve le prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ de la trace $\tau_{M,V}$.

Soit $S^{\mathcal{S}}_{M,V}=\{(\rho,m_\rho)\}$ (*resp.* $S^\tau_{M,V}, S^p_{M,V}$) l'ensemble des pôles et zéros (avec multiplicité) de $\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)^{-1}\mathcal{C}_M(s)]$ dans le demi–plan $\{\Re es<1/2\}$ (*resp.* de $\tau_{M,V}(s)$ sur $\{\Re es=1/2\}$, du produit $\prod_{\lambda<1/4}(\lambda-s(1-s))^{m_{\lambda,M,V}}$) et

$$S_{M,V}=S^{\mathcal{S}}_{M,V}S^\tau_{M,V}S^p_{M,V}.$$

Convenons d'écrire $\prod_{\rho\in S_{M,V}}(s-\rho)^{m_\rho}$ une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont l'ensemble des zéros/pôles avec multiplicité coïncide avec $S_{M,V}$ (définie par exemple sous forme d'un produit de Weierstrass, dont nous ne pouvons limiter l'ordre pour l'instant). Alors, il existe une fonction entière $F_{M,V}$ telle que, pour $s\in\mathbf{C}$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\big[R_{\Delta_M}(s(1-s)) - R_{\Delta_{M\setminus V}}(s(1-s))\big] \\
&\qquad = \frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log\Big[\prod_{\rho\in S_{M,V}}(s-\rho)^{m_\rho}e^{F_{M,V}(s)}\Big],
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition B. Q.E.D.

Remarque 4.1. Si λ est une valeur propre au moins égale à $1/4$ de Δ_M ou $\Delta_{M\setminus V}$, alors elle détermine deux points (ρ et $1-\rho$ tels que

$\lambda = \rho(1-\rho)$) de $S^{\tau}_{M,V}$. Nous soupçonnons que cela exhaut ce spectre (avec multiplicité), mis à part le point $1/4$.

§5. Fibrés plats à l'infini

5.1. Soit $\xi(M) = (\xi \to M, \langle , \rangle_\xi, \nabla_\xi)$ un fibré hermitien de rang d_ξ, avec connexion hermitienne ∇_ξ. On suppose que, à l'infini, M est hyperbolique et le fibré ξ plat. La théorie précédente s'adapte aisément à ce cadre. Soit Δ_ξ le laplacien brut associé à la connexion ∇_ξ : la forme quadratique déterminée par Δ_ξ est

$$\int_M |\nabla_\xi s|^2 dm, s \in \mathcal{C}(\xi)$$

sur un domaine, sous–espace de sections $H^1(\xi)$ déterminé par des conditions Dirichlet/Neumann sur le bord de M. Soit Δ_{ξ^*} le laplacien (avec mêmes conditions au bord si M est à bord) sur le fibré dual ξ^* correspondant : $(\Delta_\xi u, v) = (u, \Delta_{\xi^*} v)_{\xi,\xi^*}$ si $(,)_{\xi,\xi^*}$ désigne le crochet de dualité entre ξ et ξ^*. Le noyau $R_\xi(s, m, m')$ de la résolvante $(\Delta_\xi - s(1-s))^{-1}$ est considéré comme une section du fibré $\xi \boxtimes \xi^*$ sur $M \times M$: ainsi $R_\xi(s, m, m') = R_{\xi^*}(s, m', m)$.

Soit $\xi(\infty)$ le fibré de base $M(\infty)$ de rang d_ξ sur $M(\infty)_1$ et $d_\xi(p_\infty)$ sur la pointe p_∞ si $d_\xi(p_\infty)$ est la multiplicité de la valeur propre 1 de l'holonomie de ξ pour un lacet entourant la pointe p_∞. Soit $\overline{\xi}$ l'espace singulier $\xi \cup \xi(\infty)$ au–dessus de $\overline{M}$: sur un voisinage p de la pointe p_∞, $\xi_{|p} = \mathbf{C}^{d_\xi(p_\infty)} \times p \oplus \xi'$ (avec holonomie de ξ' sans valeur propre égale à 1 autour de p_∞), $\overline{\xi}_{\overline{p}}$ est alors égal à $\mathbf{C}^{d_\xi(p_\infty)} \times \overline{p} \oplus \xi'_{|p}$. Une section de $\overline{\xi}$ est lisse au voisinage de la pointe p_∞ si sa composante le long de ξ' est plate en p_∞. Toutes les propositions énoncées précédemment dans le cas scalaire restent valables pour ξ en remplacant au besoin $\overline{M}, M(\infty)$ par $\overline{\xi}, \xi(\infty)$.

Par exemple, les sections d'Eisenstein $E_\xi(s, m_\infty)(m)$ sont définies par

$$E_\xi(s, m_\infty)(m) = \lim_{m' \to m_\infty} R_\xi(s, m', m) \rho(m')^{\mathrm{rg}(m') - s}$$

comme section du fibré $\xi(\infty) \boxtimes \xi^*$ de base $M(\infty) \times M$. La formule de Green (2.1) devient

$$R_\xi(s, m', m) - R_\xi(1-s, m', m) = (1-2s) \int_{M(\infty)} E_\xi(s)(m) E_{\xi^*}(1-s)(m')$$

où le produit entre sections de $(\Lambda^s M(\infty) \otimes \xi(\infty)) \boxtimes \xi$ et $(\Lambda^{1-s} M(\infty) \otimes \xi^*(\infty)) \boxtimes \xi^*$ est induit par celui entre s et $(1-s)$–densités et la dualité entre $\xi(\infty)$ et $\xi^*(\infty)$.

La représentation spectrale de la proposition 2.2 associe à la section φ de ξ le représentant

$$\int_M E_\xi(s)(m)\varphi(m)dm$$
$$\in L^2(1/2 + i\mathbf{R}^+, L^2(\Lambda^s M(\infty) \otimes \xi(\infty), |(2s-1)^2 ds|/\pi)).$$

Le coefficient d'Eisenstein $\mathcal{C}_\xi(s)$, dont le noyau $\mathcal{C}_\xi(s, n_\infty, m_\infty)$ est une section de $(\Lambda^{1-s} M(\infty) \otimes \xi^*(\infty)) \boxtimes (\Lambda^{1-s} M(\infty) \otimes \xi(\infty))$, est un opérateur de $\mathcal{C}(\Lambda^s M(\infty) \otimes \xi(\infty))$ sur $\mathcal{C}(\Lambda^{1-s} M(\infty) \otimes \xi(\infty))$ qui vérifie les équations fonctionnelles

$$E_\xi(s) = \mathcal{C}_\xi(1-s) E_\xi(1-s)$$
$$\mathcal{C}_\xi(s)\mathcal{C}_\xi(1-s) = 1.$$

5.2. La proposition A reste valable pour l'opérateur

$$T_{\xi,V} = (\Delta_{\xi(M)} - s(1-s))^{-1} - (\Delta_{\xi(M\setminus V)} - s(1-s))^{-1}$$

qui opère sur l'espace $L^2(M, \mathbf{C}^d)(\simeq L^2(\xi))$. Les opérateurs $\Delta_{\xi(M)}$ et $\Delta_{\xi(M\setminus V)}$ désignent des laplaciens avec des conditions au bord convenable sur les bords ∂M et $\partial(M \setminus V)$ (sur deux composantes du bord de $M \setminus V$ en regard, les conditions au bord ne sont pas nécessairement les mêmes). De même, la proposition B se généralise suivant :

Proposition $\mathbf{B}_\xi$. *Soit M surface de topologie finie et hyperbolique au voisinage de l'infini. Soit $\xi \to M$ un fibré complexe hermitien avec connexion ∇_ξ (et son laplacien brut Δ_ξ associé), plat à l'infini. Soit $\mathcal{C}_\xi(s)$ le coefficient d'entrelacement des sections d'Eisenstein associées au laplacien Δ_ξ. Soit V une courbe régulière compacte de M.*
(i) *L'opérateur $\mathcal{C}_\xi(s)\mathcal{C}_{\xi(M\setminus V)}(s)^{-1} - 1$ de $L^2(\Lambda^s M(\infty) \otimes \xi(\infty))$ est à trace, méromorphe en $s \in \mathbf{C}$*
(ii) *Soit $S^\tau_{\xi,V} = \{(\rho, m_\rho)\}$ l'ensemble des pôles simples ρ avec résidu m_ρ de $(2s-1)\tau_{\xi,V}(s)$ sur $\{\Re es = 1/2\}$, $S^{\mathcal{S}}_{\xi,V} = \{(\rho, m_\rho)\}$* (resp. $S^p_{\xi,V}$) *l'ensemble des pôles et zéros (avec multiplicité) de*

$$\det[\mathcal{C}_{\xi(M\setminus V)}(s)^{-1}\mathcal{C}_{\xi(M)}(s)]$$

dans le demi-plan $\{\Re es < 1/2\}$ (resp. du produit $\prod_{\lambda<1/4}(\lambda - s(1-s))^{\delta m_{\xi(M),V}(\lambda)}$ avec $\delta m_{\xi(M),V}(\lambda) = m_{\xi(M)}(\lambda) - m_{\xi(M\setminus V)}(\lambda)$) et $S_{\xi,V}$ l'union de $S^{\mathcal{S}}_{\xi,V}, S^\tau_{\xi,V}$ et $S^p_{\xi,V}$.

Si $\prod_{\rho\in S_{\xi,V}}(s-\rho)^{m_\rho}$ *désigne une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$ *dont l'ensemble des zéros/pôles (avec multiplicité) est* $S_{\xi,V}$*, alors il existe une fonction entière* $F_{\xi,V}$ *telle que*

$$\tau_{\xi,V}(s)=\frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log\Big[\prod_{\rho\in S_{\xi,V}}(s-\rho)^{m_\rho}e^{F_{\xi,V}(s)}\Big].$$

§6. La formule de traces exacte

6.1. On établit ici la formule de traces exacte de la proposition C pour un fibré plat ξ de rang d_ξ de base une surface hyperbolique M à bord totalement géodésique compact. Nous commençons par exprimer les domaines des opérateurs avec conditions de Neumann/Dirichlet en termes d'espaces de fonctions équivariantes sur $\mathbf{H}^2$ relativement à une représentation unitaire du groupe Γ tel que $M=\mathbf{H}^2/\Gamma$.

6.2. Soit M variété connexe dont le bord ∂M compte n composantes connexes $(N_i)_{i=1}^n$. Soit S_n l'ensemble des points $\{\pm1\}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ et G_n le groupe $\{\pm1\}^n$. On introduit la variété sans bord $\hat M=\coprod_{s\in S_n}M_s/\sim$ où on a identifié la composante N_i du bord ∂M_s avec $N_{\tilde i}$ de $M_{\tilde s}$ si $i=\tilde i$ et le vecteur $s-\tilde s$ est parallèle au $i$ième axe de coordonnées. L'action naturelle de G_n sur S_n induit une action isométrique sur $\hat M$: si $x\in M_s$ et $\sigma\in G_n$, σx est le point correspondant de $M_{\sigma s}$ (cette action est compatible avec les identifications). On retrouve M comme quotient de $\hat M$ par G_n. Si $\tilde M$ désigne le revêtement universel de $\hat M$, une symétrie σ de $\hat M$ se relève en une isométrie $\tilde\sigma$ de $\tilde M$ et, comme sous–groupe de $\mathrm{Isom}(\tilde M)$, le sous–groupe Γ engendré par les $\tilde\sigma$ et $\pi_1(\hat M)$ est discret.

Soit $\xi\to M$ un fibré de rang d_ξ, plat et hermitien de base M. On en déduit par la construction précédente un fibré plat $\hat\xi\to\hat M$ dont la donnée est équivalente à celle d'un morphisme (noté encore) $\hat\xi$ de $\pi_1(\hat M)$ dans le groupe unitaire $U(d_\xi)$. Si $\hat\eta\to\hat M$ est un fibré et σ une transformation de $\hat M$, (relevé en $\tilde\sigma$ comme transformation de $\tilde M$) il existe un endomorphisme $\hat\sigma_{\hat\eta}$ de $\hat\eta$ au dessus de σ si et seulement si le morphisme associé $\hat\eta$ vérifie : $\hat\eta(\tilde\sigma\gamma\tilde\sigma^{-1})=\hat\eta(\gamma),\forall\gamma\in\pi_1(\hat M)$. C'est le cas pour les symétries σ induites par G_n et les fibrés $\hat\xi$ issus de fibrés sur M comme précédemment. Un tel morphisme $\hat\xi$, conjointement avec un caractère ε de G_n, donne un morphisme ξ^ε de Γ : $\xi^\varepsilon(\gamma\tilde\sigma)=\hat\xi(\gamma)\varepsilon(\sigma)$. À la donnée de ξ^ε est associée l'extension auto–adjointe (notée $\Delta_{\xi^\varepsilon(M)}$) du laplacien

Δ_M symétrique sur $\mathcal{C}_0(M \setminus \partial M, \xi)$ de domaine

$$\mathcal{D}(\Delta_{\xi^\varepsilon}) = \{u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\tilde{M}), \gamma^* u = \xi^\varepsilon(\gamma) u, \gamma \in \Gamma\}$$

qui s'interpréte comme le laplacien avec conditions de Dirichlet sur les composantes de bord N_i telles que $\varepsilon_i = -1$ et conditions de Neumann sinon.

Si M est non connexe, $\Delta_{\xi^\varepsilon(M)}$ (le ε sera désormais implicite) notera la somme directe des laplaciens définis sur les composantes connexes de M. Si on découpe M le long d'une courbe V, alors le choix de conditions de Dirichlet ou Neumann sur les diverses composantes de bord revient à choisir un(e famille de morphismes) ξ^ε (la condition sur les deux bords de part et d'autre d'une composante de V n'est pas nécessairement la même).

Pour la validité de la proposition C , il faut définir les fonctions zêta Z_{ξ^ε} de manière appropriée relativement au choix des conditions au bord déterminées par ε. Pour un lacet (orienté) C, notons par ξ^ε_C (classe de conjugaison dans $U(d_\xi)$) l'holonomie du fibré ξ le long de C, relativement à la condition au bord ε : on développe le fibré ξ le long du lacet C, avec multiplication par -1 à chaque réflexion sur une composante de bord Dirichlet ; si à C correspond la classe $[\gamma_C]$, l'holonomie est donnée par $\xi^\varepsilon_C = [\xi^\varepsilon(\gamma_C)]$. Le facteur zêta qui lui est associé est défini par

$$Z_{\xi^\varepsilon}(C)(s) = \prod_{k \geq 0} \det[1 - (-1)^{i_C k} \xi^\varepsilon_C e^{-l_C(s+k)}].$$

Quant à un lacet C du bord, on pose

$$Z_{\xi^\varepsilon}(C)(s) = e^{\varepsilon_C d_\xi l_C/8} \prod_{k \geq 0} \det[1 - \xi^\varepsilon_C e^{-l_C(s+2k+(1-\varepsilon_C)/2)}]$$

avec $\varepsilon_C = 1$ ou -1 suivant que la condition au bord sur la composante C est Neumann ou Dirichlet.

6.3. Soit M connexe à bord géodésique compact et V courbe géodésique compacte de M. La surface M est le quotient de $\mathbf{H}^2$ par un groupe discret Γ_0 d'isométries. Soit $\mathcal{D}_0$ un domaine fondamental à bord géodésique pour l'action de Γ_0. Relevant V dans $\mathcal{D}_0$ en $\tilde{V}$, on obtient des domaines $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m$ (non nécessairement connexes) se projetant sur les composantes connexes $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$ de $M \setminus V$.

Il existe une suite (Γ_j) de groupes uniformisant $(\mathcal{O}_j)$ de manière compatible avec Γ : $\mathcal{D}_j$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ_j et $\mathbf{H}^2/\Gamma_j \simeq \mathcal{O}_j$; si p est une pointe de M_j, les sous–groupes paraboliques maximaux dans Γ et Γ_j fixant $p_\infty \in \overline{\mathcal{D}}_\infty$ (se projetant sur $p(\infty) \in M(\infty)_0$) coïncident.

Soit $\overline{\chi}_t$ la fonction caractéristique de la partie $\{\rho \geq t\}$ de M. La restriction à la diagonale du noyau k_t de $\overline{\chi}_t[(\Delta_{\xi(M)} - s(1-s))^{-1} - (\Delta_{\xi(M\setminus V)} - s(1-s))^{-1}]\overline{\chi}_t$ est donnée par

$$\overline{\chi}_t(z)\Big(\sum_{\gamma_0\in\Gamma_0} \xi_0(\gamma_0) R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\gamma_0 z') \\ - \sum_{j=1}^{m} \chi_{\mathcal{D}_j}(z) \sum_{\gamma_j\in\Gamma_j} \xi_j(\gamma_j) R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\gamma_j z')\chi_{\mathcal{D}_j}(z)\Big)_{|z=z'}.$$

Les termes provenant de l'identité s'annihilant, il reste une somme de termes qu'on regroupe suivant les classes de conjugaison $[\gamma_j^n]_{\Gamma_j}$ d'itérés d'éléments primitifs hyperboliques et paraboliques des différents groupes.

Pour γ_j dans Γ_j, notons $Z_{\Gamma_j}(\gamma_j)$ son centralisateur dans Γ_j, avec domaine fondamental $\mathcal{D}(Z_{\Gamma_j}(\gamma_j))$. A l'ordinaire, on transforme l'intégrale

$$\int_{\mathcal{D}_j} \sum_{\psi\in[\gamma_j]_{\Gamma_j}} \operatorname{tr}\xi(\psi)\overline{\chi}_t(z) R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\psi z)dz$$

en

$$\operatorname{tr}\xi(\gamma_j)\int_{\mathcal{D}(Z_{\Gamma_j}(\gamma_j))} \overline{\chi}_t^{\Gamma_j}(z) R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\gamma_j z)dz,$$

où $\overline{\chi}_t^{\Gamma_j}$ note l'extension Γ_j–invariante de $\overline{\chi}_t$ (initialement) définie sur $\mathcal{D}_j$.

Les termes paraboliques sont regroupés naturellement suivant la pointe p qu'ils fixent. Soit par exemple $p \in M_1$, le domaine $\mathcal{D}_0$ étant tel que $p(\infty)$ se relève en p_∞, avec stabilisateur Γ_0^∞ engendré par γ_∞ de domaine fondamental $\mathcal{D}_\infty$. Les holonomies $\xi_0(\gamma_\infty)$ et $\xi_1(\gamma_\infty)$ coïncident, on notera $\xi(\gamma_\infty)$ cette holonomie. L'intégrale

$$I_t(p,\xi) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \Bigg[\int_{\mathcal{D}_0} \overline{\chi}_t(z) \sum_{\psi_0\in[\gamma_\infty^n]_{\Gamma_0}} \operatorname{tr}\xi_0(\psi_0) R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\psi_0 z)dz \\ - \int_{\mathcal{D}_1} \overline{\chi}_t(z) \sum_{\psi_1\in[\gamma_\infty^n]_{\Gamma_1}} \operatorname{tr}\xi_1(\psi_1) R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\psi_1 z)dz\Bigg]$$

est transformée en

$$I_t(p,\xi) = \int_{\mathcal{D}_\infty} (\overline{\chi}_t^{\Gamma_0}(z) - \overline{\chi}_t^{\Gamma_1}(z)) \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \operatorname{tr}\xi(\gamma_\infty)^n R_{\mathbf{H}_2}(s,z,\gamma_\infty^n z)dz.$$

Représentons $\mathbf{H}^2$ par le demi–plan de Poincaré et normalisons Γ de manière à ce que $\gamma_\infty z = z+1$ avec $\mathcal{D}_\infty = \{0 \le \Re e z \le 1\}$. Le voisinage $\{\rho \le t\}$ de la pointe p correspond à la bande $\{\Im m z \ge 1/t\}$. Ainsi, pour $t \le 1$, la fonction $\overline{\chi}_t^{\Gamma_0} - \overline{\chi}_t^{\Gamma_1}$ est à support dans $\{0 \le \Re e z \le 1, \Im m z \le 1\}$, domaine sur lequel $\sum_{n \in \mathbf{Z}^*} R_{\mathbf{H}_2}(s, z, z+n)$ est intégrable. On en déduit $\lim_{t \to 0^+} I_t(p, \xi) = 0$ et la trace

$$\tau_{\xi,M,V}(s) = \lim_{t \to 0^+} \operatorname{tr}[\overline{\chi}_t((\Delta_{\xi(M)} - s(1-s))^{-1} - (\Delta_{\xi(M\setminus V)} - s(1-s))^{-1})\overline{\chi}_t]$$

se réduit à la somme des contributions des éléments hyperboliques et ceux renversant l'orientation.

Si γ_j est un tel élément, l'intégrale

$$\int_{\mathcal{D}(Z_{\Gamma_j}(\gamma_j))} R_{\mathbf{H}_2}(s, z, \gamma_j z) dz$$

(ainsi que la somme de ces intégrales sur l'ensemble des γ_j) est absolument convergente, ce qui permettra de passer à la limite $t = 0$. Les contributions de ces éléments sont données par le lemme suivant, dont nous omettrons la démonstration classique ([17]) :

Lemme 6.1. *Soit γ isométrie directe hyperbolique de multiplicateur e^{l_γ} et σ_γ la symétrie géodésique par rapport à l'axe de γ.*

$$\begin{aligned} I(\gamma, n) &= \int_{\mathcal{D}(\langle\gamma\rangle)} R_{\mathbf{H}^2}(s, z, \gamma^n z) dz \\ &= (2s-1)^{-1} l_\gamma \frac{e^{-nl_\gamma(s-1/2)}}{2\operatorname{sh}(|n| l_\gamma/2)}, n \in \mathbf{Z}^* \\ I(\gamma, \sigma_\gamma, n) &= \int_{\mathcal{D}(\langle\gamma, \sigma_\gamma\rangle)} R_{\mathbf{H}^2}(s, z, \gamma^n \sigma_\gamma z) dz \\ &= (2s-1)^{-1} l_\gamma \frac{e^{-nl_\gamma(s-1/2)}}{4\operatorname{ch}(n l_\gamma/2)}, n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Nous regroupons ces différents termes suivant les géodésiques (primitives orientées) des surfaces $\mathcal{O}_j = \mathbf{H}^2/\Gamma_j$. Pour une géodésique C de $\mathcal{O} = \mathbf{H}^2/\Gamma$, soit γ_C un élément hyperbolique primitif dont l'axe (orienté vers le point fixe attractif de γ_C) se projette sur C, avec commutateur $Z_\Gamma(\gamma_C)$ dans Γ. On a les alternatives suivantes :
(i) $Z_\Gamma(\gamma_C)$ est monogène engendré par γ_C. Si γ_C conserve (renverse *resp.*) l'orientation, alors C a un nombre d'intersection i_C avec le bord pair (impair *resp.*),

(ii) $Z_\Gamma(\gamma_C)$ est engendré par une isométrie directe hyperbolique γ_0 et par la symétrie σ_0 d'axe $\mathcal{A}(\gamma_0)$. La géodésique C est une géodésique du bord de $\mathcal{O}$.

A C du premier type est associé le paquet de contributions hyperboliques

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \operatorname{tr}\xi(\gamma_C)^n I(\gamma_C, n)$$

ou

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \left[\operatorname{tr}\xi(\gamma_C^{2n}) I(\gamma_C\sigma_{\gamma_C}, 2n) + 2\operatorname{tr}\xi(\gamma_C^{2n-1}) I(\gamma_C\sigma_{\gamma_C}, \sigma_{\gamma_C}, 2n-1)\right]$$

suivant que γ_C conserve ou non l'orientation, de somme égale à

$$\frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log[Z_\xi(C)(s)]$$

et au couple $(C, -C)$ d'une géodésique C bordant M

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \frac{\operatorname{tr}\xi(\gamma_C^n)}{2} I(\gamma_C, n) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} \operatorname{tr}\xi(\gamma_C^n\sigma_{\gamma_C}) I(\gamma_C, \sigma_{\gamma_C}, n)$$
$$= \frac{2}{2s-1}\frac{d}{ds}\log[\partial Z_\xi(C)].$$

La proposition C pour un fibré ξ avec conditions au bord ε, est ainsi démontrée :

Proposition 6.2($\mathrm{C}_{\xi^\varepsilon}$). *Soit M une surface de topologie finie, à courbure constante -1 et V une courbe géodésique compacte de M. Soit ξ un fibré plat sur M et $T_{\xi,V}(s) = (\Delta_{\xi^\varepsilon(M)} - s(1-s))^{-1} - (\Delta_{\xi^\varepsilon(M\setminus V)} - s(1-s))^{-1}$.*

$$\operatorname{tr} T_{\xi,V}(s) = \frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log[Z_{\xi^\varepsilon}(s)/Z_{\xi^\varepsilon(M\setminus V)}(s)].$$

§7. Spectres des longueurs

7.1. Soit M une surface hyperbolique de géométrie finie. Désignons par π_M la fonction de comptage associée au spectre des longueurs de M, *ie.* $\pi_M(l) = \#\{C, l_C \leq l\}$ et soit h_M l'entropie du flot géodésique sur M.

Si M est hyperbolique (égale à $\mathbf{H}^2/\Gamma$), l'entropie h_M est égale à l'exposant de Poincaré δ_Γ de Γ, *ie.* l'abscisse de convergence (indépendante de z) des séries $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-d(z,\gamma z)}$. Cette entropie est strictement supérieure à $1/2$ si et seulement si le laplacien Δ_M (avec conditions de Neumann si M est à bord) a comme minimum spectral λ_M une valeur propre isolée : dans ce cas (par exemple si M est compacte ou a une pointe), la relation $\lambda_M = h_M(1 - h_M)$ est vérifiée.

Proposition 7.1. *Soit M surface hyperbolique de géométrie finie. On a l'asymptotique*

$$\pi_M(l) \sim \frac{e^{h_M l}}{h_M l}, l \to +\infty.$$

Preuve. Si $h_M \leq 1/2$ (et alors M est nécessairement sans pointe non compacte), la dynamique du flot géodésique est décrite symboliquement en termes d'une suspension d'un sous–décalage et LALLEY ([9]) démontre ainsi l'asymptotique de la proposition.

Si $h_M > 1/2$, nous utilisons, à l'ordinaire, le théorème taubérien d'Ikehara avec le lemme suivant, conséquence directe de la proposition C et du cas des surfaces M d'aire finie.

Lemma 7.2. *La fonction*

$$\frac{d}{ds} \log Z_{\xi^\varepsilon}(s) - \sum_{\lambda \in \mathcal{S}_\xi^{p<1/4}} (\lambda - s(1-s))^{-1}$$

est holomorphe sur le demi–plan $\{\Re es > 1/2\}$.

Références

[1] S. Agmon, Spectral theory of Schrödinger operators on euclidean and non–euclidean spaces, Comm. Pure Appl. Math., **S** (1986), 3–16.

[2] M. Birman and M. Krein, On the theory of wave operators and scattering operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **144** (1962), 475–478.

[3] I. Effrat, Determinants of laplacians on surfaces of finite volume, Comm. Math. Phys., **119** (1988), 443–451.

[4] C. Epstein, Asymptotics for closed geodesics in a homology class, the finite volume case, Duke Math. J., **55** (1987), 717–757.

[5] D. Fried, Zeta functions of Ruelle and Selberg I, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **19** (1986), 491–517.

[6] G. Grubb, Singular Green operators and trace class estimates for exterior boundary problems, Duke Math. J., **51** (1984), 447–528.

[7] A. Katsuda and T. Sunada, Homology and closed geodesics in a compact riemann surface, J. Amer. Math. Soc., **109** (1987), 145–156.

[8] M. Krein, On the trace formule in the theory of perturbation, Mat. Sb. (N.S.), **33** (1953), 597–626.

[9] S. Lalley, Renewal theorems in symbolic dynamics with applications to geodesic flows noneuclidian tesselations and their fractal limits, Acta Math., **163** (1989), 1–55.

[10] D. Mayer, *Selberg's zeta function for $PSL(2,\mathbf{Z})$ via the thermodynamic formalism for the continued fraction map*, prépublication.

[11] R. Mazzeo and R. Melrose, Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature, J. Funct. Anal., **75** (1987), 260–310.

[12] P. Perry, The laplace operator on a hyperbolic manifold. II. Eisenstein series and the scattering matrix, J. Reine Angew. Math., **398** (1989), 67–91.

[13] M. Pollicot, Analytic extensions of the zeta functions for surfaces of variable negative curvature, J. Differential Geom., **29** (1989), 699–706.

[14] R. Phillips P. Sarnak, Geodesics in homology classes, Duke Math. J., **55** (1987), 287–297.

[15] P. Sarnak, Determinants of laplacians, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 113–120.

[16] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. (N.S.), **20** (1956), 47–87.

[17] A. Venkov, Spectral theory of automorphic functions, Proc. Steklov Inst. Math., **153** (1981), 1–162.

[18] A. Voros, Spectral functions special functions and the Selberg zeta function, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 439–465.

Institut Fourier
Université de Grenoble 1
U. R. A. 188 C. N. R. S.
BP74, 38402 Saint Martin D'Hères Cedex
France
guil@frgren81.bitnet