GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur le spectre des longueurs d'une surface compacte à courbure* $-1$ *et à bord totalement géodésique.* Note de **Laurent Guillopé**, présentée par Bernard Malgrange.

Soit M une surface compacte à courbure constante $-1$ et à bord totalement géodésique. Notons $\pi_p(x)$ [resp. $\pi_i(x)$, $\tilde{\pi}_M(x)$] le nombre de géodésiques simples fermées avec un nombre pair (resp. impair, nul) de réflexions sur $\partial$M, de longueur au plus égale à $x$. On montre que :

$$\pi_p(x) \sim \pi_i(x) \sim e^x/2x \qquad (x \to \infty)$$

et que, si un certain exposant de Poincaré $\delta_{M_\infty}$ est supérieur à 1/2,

$$\tilde{\pi}_M(x) \sim e^{\delta_{M_\infty} x}/\delta_{M_\infty} x.$$

*DIFFERENTIAL GEOMETRY.* — On the length spectrum of a compact surface with constant curvature $-1$ and totally geodesic boundary.

*Let* M *be a compact surface with constant curvature* $-1$ *and totally geodesic boundary. Let* $\tilde{\pi}_M(x)$ *[resp.* $\pi_p(x)$, $\pi_i(x)$*] denote the number of simple closed geodesics with no (resp. an even number, an odd number of) reflections on* $\partial$M *with length not larger than x. We show that:*

$$\pi_p(x) \sim \pi_i(x) \sim e^x/2x \qquad (x \to \infty),$$

*and, if a certain Poincaré exponent* $\delta_{M_\infty}$ *is bigger than* 1/2,

$$\tilde{\pi}_M(x) \sim e^{\delta_{M_\infty} x}/\delta_{M_\infty} x.$$

1. Soit M une surface riemannienne orientable à courbure $-1$ et notons $\pi(x)$ le nombre des géodésiques simples fermées (avec réflexions sur le bord éventuellement) de longueur au plus égale à $x$. Si M est sans bord et d'aire finie, on a l'asymptotique $\pi(x) \sim e^x/x$ $(x \to \infty)$ [3]. Cette Note annonce des résultats analogues dans le cas où M est compacte, à bord non vide et totalement géodésique, ce qui est supposé désormais.

Nous distinguerons les géodésiques simples fermées de M selon qu'elles ont un nombre nul, pair ou impair de réflexions sur le bord et noterons $\tilde{\pi}_M$, $\pi_p$, $\pi_i$ les fonctions de comptage correspondantes. On a évidemment $\pi = \pi_p + \pi_i$ et $\tilde{\pi}_M$ est en fait la fonction de comptage (mises à part les géodésiques du bord de M) pour la surface $M_\infty$ (non compacte, d'aire infinie, sans pointes) obtenue en recollant à chaque composante C du bord de M une vasque hyperbolique $V_C$ (si C est de longueur $l$, $V_C$ est isométrique à $(\mathbb{R}/l\mathbb{Z})_\sigma \times \overline{\mathbb{R}_\tau^+}$ muni de la métrique $ds^2 = ch^2 \tau \, d\sigma^2 + d\tau^2$).

2. Nous avons les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — $\pi_p(x) \sim \pi_i(x) \sim e^x/2x$.

THÉORÈME 2. — *Si l'exposant de Poincaré* $\delta_{M_\infty}$ *associé à la surface* $M_\infty$ *est strictement supérieur à* 1/2,

$$\tilde{\pi}_M(x) \sim e^{\delta_{M_\infty} x}/\delta_{M_\infty} x.$$

3. GÉOMÉTRIE ET GROUPES. — Ces résultats sont démontrés via des formules de trace à la Selberg pour des laplaciens convenables en considérant les surfaces M, $M_\infty$ comme quotients du plan hyperbolique H par un groupe discret ($\Gamma$, $\Gamma_{M_\infty}$ resp.) d'isométries de H. L'action de $\Gamma$ sur H possède un polygone géodésique fondamental $\mathcal{D}$, qui permet de décrire simplement en termes de générateurs et relations les groupes $\Gamma$ et $\Gamma_{M_\infty}$. Le groupe $\Gamma_{M_\infty}$ apparaît comme un sous-groupe de $\Gamma_+$, groupe des isométries directes de $\Gamma$, d'autre part $H/\Gamma_+$ est la surface $M_2$ compacte, sans bord, double de M.

Toutes les transformations de $\Gamma$ possèdent un axe, droite globalement invariante et deux d'entre elles commutent si et seulement si elles ont même axe. On établit alors une

0249-6321/85/03000355 \$ 2.00 © Académie des Sciences

correspondance biunivoque entre les centralisateurs $Z(\gamma)$, à conjugaison près, et les géodésiques C simples fermées de M, l'axe de $\gamma$ se projetant sur la géodésique associée : si $Z(\gamma)$ contient une symétrie, $C(\gamma)$ est une composante du bord de M; si $Z(\gamma)$ est engendré par une isométrie directe (resp. indirecte) $C(\gamma)$ compte un nombre pair (resp. impair) de réflexions sur le bord.

Rappelons enfin que l'exposant de Poincaré d'un groupe fuchsien $\hat{\Gamma}$ (ou de la surface associée $H/\hat{\Gamma}$) est l'abscisse de convergence des séries de Poincaré $\sum_{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}} e^{-sd(z,\,\hat{\gamma}z)}$ ($z\in H$, $d$ est la distance hyperbolique). On sait [1] que, $\Gamma_{M_\infty}$ étant de type fini, $\delta_{M_\infty}$ est strictement supérieur à 1/2 si et seulement si le laplacien $\Delta_{M_\infty}$, à spectre purement continu sur $[1/4, \infty[$, a une valeur propre dans $]0, 1/4[$ [et dans ce cas $\delta_{M_\infty}(1-\delta_{M_\infty})$ est le bas du spectre de $\Delta_{M_\infty}$].

4. Remarques. — (i) Les formules de trace qui sous-tendent le théorème 1 peuvent être vues comme des formules de trace de Selberg avec opérateur de Hecke, formellement décrites dans [4].

(ii) Sans hypothèse sur $\delta_{M_\infty}$, on a $\tilde{\pi}_M(x)=O(e^{\delta_{M_\infty}x})$ d'après [6].

(iii) Les géodésiques simples, fermées de M, avec un nombre impair de réflexions sur le bord, correspondent (par relèvement) exactement aux géodésiques orientées de $M_2$ (de longueur double) invariantes par la symétrie $\tau$ de $M_2$ telle que $M=M_2/\tau$.

(iv) On peut considérer d'autres fonctions de comptage : par exemple, soit $\sigma$ un cycle (indexé par $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$) de $2n$ entiers pris entre 1 et N (où N est le nombre de composantes de $\partial M$) dont deux quelconques d'indices successifs sont distincts et $\pi_\sigma$ la fonction de comptage associée à l'ensemble des géodésiques fermées simples de M se réfléchissant successivement sur les composantes de $\partial M$ d'indice $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2n)$. Si $M_\sigma$ désigne la surface obtenue à partir de $2n$ exemplaires $(M_i)$ de M en recollant $M_i$ et $M_{i+1}$ suivant la composante d'indice $\sigma(i)$, on a, avec les notations convenables,

$$\Gamma_{(M_\sigma)_\infty}\supset\Gamma_{M_\infty},\qquad \delta_{(M_\sigma)_\infty}\geqq\delta_{M_\infty},\qquad 2n\,\tilde{\pi}_M\leqq\tilde{\pi}_{M_\sigma}\qquad\text{et}\qquad \pi_\sigma\leqq\tilde{\pi}_{M_\sigma}.$$

5. Démonstration du théorème 1. — Soit $\Delta_+$ $(\Delta_-)$ le laplacien sur M avec conditions de Neumann (resp. Dirichlet) sur le bord. Les opérateurs $e^{-t\Delta_\pm}$, régularisants, sont à trace et ont pour noyau :

$$e^{-t\Delta_\pm}(m, m')=\sum_{\gamma\in\Gamma_+}E(t, z, \gamma z')\pm\sum_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_+}E(t, z, \gamma z')$$

[$E(t, z, z')$ désigne le noyau de la chaleur sur le plan hyperbolique H, $z$ et $z'$ sont pris dans $\mathscr{D}$ au-dessus de $m$ et $m'$]. En suivant les calculs classiques à la Selberg, on obtient les formules de trace suivantes :

$$(5)\quad \operatorname{Tr} e^{-t\Delta_\pm}=\operatorname{Vol} M\frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}}\int_0^\infty\frac{be^{-b^2/4t}}{\operatorname{sh}(b/2)}db+\frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{j=1}^{N} l_j\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-(kl_j)^2/(4t)}\,e^{\pm(kl_j/2)}}{\operatorname{sh}(kl_j)}\pm\frac{1}{2}\right\}\right.$$
$$\left.+\sum_{\{C\}_p} l(C)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-((kl(C))^2/4t)}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)}+\sum_{\{C\}_i} l(C)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-((2kl(C))^2/4t)}}{\operatorname{sh}(kl(C))}\pm\frac{e^{-((2k-1)\,l(C))^2/4t}}{\operatorname{ch}(k-1/2)\,l(C)}\right\}\right\},$$

où la première (resp. seconde, troisième) somme porte sur les composantes du bord $\partial M$ (resp. les géodésiques simples avec un nombre impair, resp. pair de réflexions) et $l_j$, $l(C)$ notent les longueurs des géodésiques correspondantes.

En passant, on obtient l'asymptotique $\operatorname{Tr} e^{-t\Delta_\pm} \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i^\pm t^{-1+i/2}$, avec :

$$a_i^+ = (-1)^i a_i^-, \qquad a_0^+ = (\operatorname{vol} M)/4\pi, \qquad a_1^+ = (\operatorname{vol} \partial M)/8\sqrt{\pi}$$

et l'asymptotique de Weyl bien connu sur les fonctions de comptage $N_\pm(\lambda)$ associées aux spectres des laplaciens $\Delta_\pm$. Ainsi la résolvante $(\Delta_\pm - \lambda)^{-1}$ n'est pas à trace alors que $T_\pm(\lambda, \lambda_0) = (\Delta_\pm - \lambda)^{-1} - (\Delta_\pm - \lambda_0)^{-1}$ l'est. D'autre part l'opérateur $T_i(\lambda) = (\Delta_+ - \lambda)^{-1} - (\Delta_- - \lambda)^{-1}$ est un opérateur de Green singulier d'ordre $-2$ et donc à trace d'après [2]. Utilisant (5) et la transformation de Laplace, on obtient des formules de trace pour $T_+(\lambda, \lambda_0)$ et $T_i(\lambda)$ qui livrent par un argument classique à base de théorème taubérien l'asymptotique de $\pi$ et $\pi_i$ respectivement.

La formule de trace pour $T_i(\lambda)$ permet en outre de prolonger la fonction zêta :

$$\zeta_M(s) = \prod_{\{C\}_i} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-l(C)(s+n)}}{1 + e^{-l(C)(s+n)}}\right)^{(-1)^n} \prod_{j=1}^{N} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-l_j(s+n)})^{2(-1)^n}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée logarithmique :

$$(2s-1) \operatorname{Tr} \{ T_i(s(1-s)) \} - ((\operatorname{vol} \partial M)/2).$$

(Les zéros et les pôles de $\zeta_M$ sont aussi simplement reliés aux valeurs propres de $\Delta_+$ et $\Delta_-$) et vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\zeta_M(s) = \zeta_M(1-s)\, e^{\operatorname{vol}(\partial D)(s-(1/2))}.$$

6. Démonstration du théorème 2. — Soit $\Delta_{M_\infty}$ (resp. $\Delta_{M_\infty - \partial M}$, $\Delta_{M_\infty - M}$) le laplacien sur $M_\infty$ (resp. sur $M_\infty - \partial M$, $M_\infty - M$ avec condition de Dirichlet sur le bord). Soit $\varphi$ une fonction $C^\infty$ sur $M_\infty$, nulle au voisinage de M et valant 1 en dehors d'un compact.

Proposition 3. — *L'opérateur* $E(t) = e^{-t\Delta_{M_\infty}} - e^{-t\Delta_{M_\infty - \partial M}}$ *est à trace et il existe des constantes positives* $C_1$, $C_2$, $C_3$ *telles que* :

$$(6.1) \qquad \begin{cases} \| \varphi E(t) \varphi \|_{\mathrm{tr}} \leq C_1 e^{C_2 t} e^{-C_3/t}, & t > 0 \\ (\| \ \|_{\mathrm{tr}} \text{ désigne la norme trace}). \end{cases}$$

La méthode est analogue à celle utilisée dans [5] pour l'étude du problème extérieur dans l'espace euclidien. L'opérateur $E(t)$ étant régularisant, il est à trace si sa partie opérant à l'infini $\varphi E(t) \varphi$ l'est. Supposons pour simplifier que le bord $\partial M$ soit connexe et notons $\kappa$ la fonction définie sur $M_\infty$ par $\kappa(m) = e^{2d(m, \partial M)}$ ($d$ désigne la distance sur $M_\infty$). On écrit alors :

$$\varphi E(t) \varphi = (\varphi e^{-t/2 \Delta_{M_\infty}} \kappa^{-1}) (\kappa E(t/2) \varphi) + (\varphi E(t/2) \kappa) (\kappa^{-1} e^{-t/2 \Delta_{M_\infty - M}} \varphi)$$

et on obtient des estimées sur la norme Hilbert-Schmidt de chaque facteur de l'expression précédente grâce au lemme suivant.

Lemme. — *Il existe des constantes* $K_1$, $K_2$, $K_3$ *telles que* :

$$\left| e^{-s\Delta_{M_\infty - M}}(m, m') \right| + \left| e^{-s\Delta_{M_\infty}}(m, m') \right| \leq K_1 \frac{e^{K_2 s}}{s} e^{-K_3 (d(m, m')^2/s)}, \qquad m, m' \in M_\infty$$

$$\left| (e^{-s\Delta_{M_\infty}} - e^{-s\Delta_{M_\infty - \partial M}})(m, m') \right| \leq K_1 \frac{e^{K_2 s}}{s} e^{-K_3 [d(m, \partial M)^2 + d(m', \partial M)^2]/s}, \quad m \in M_\infty, \quad m' \in M_\infty - M.$$

La proposition 3 en résulte et on écrit alors une formule de trace pour $E(t)$. L'opérateur $T(\lambda)=(\Delta_{M_\infty}-\lambda)^{-1}-(\Delta_{M_\infty-\partial M}-\lambda)^{-1}$, transformée de Laplace de $E(t)$ est à trace : cela résulte de (6.1) pour sa partie à l'infini (si $\operatorname{Re}\lambda<-C_2$) et à nouveau de [2] pour le reste. On obtient alors la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit* $\lambda_0$ *en dehors du spectre de* $\Delta_-$ *et* $T_0(\lambda)$ *l'opérateur défini par :*

$$T_0(\lambda)=(\Delta_{M_\infty}-\lambda)^{-1}-((\Delta_- -\lambda_0)^{-1}\oplus(\Delta_{M_\infty-M}-\lambda)^{-1}).$$

*Alors* $T_0(\lambda)$ *est à trace et on a, si* $\operatorname{Re}s>1$ :

$$\text{(6.2)}\quad \operatorname{Tr}T_0(s(1-s))=-\frac{\operatorname{vol}M}{4\pi}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)+\frac{1}{2s-1}\sum_{j=1}^{N}l_j\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kl_j(s-1)}}{\operatorname{sh}kl_j}+\frac{1}{4}\right\}$$
$$+\frac{1}{2(2s-1)}\sum_{\{C\}_0}l(C)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kl(C)(s-(1/2))}}{\operatorname{sh}kl(C)/2}+\Lambda_0,$$

*où* $\Lambda_0$ *est une constante indépendante de s et la dernière sommation porte sur les géodésiques simples fermées de* M, *ne rencontrant pas le bord.*

Le membre de gauche de (6.2) est méromorphe sur $\{\operatorname{Re}s>1/2\}$ avec des pôles simples aux points $\{(1/2)+r\}$ correspondant aux valeurs propres $\{\lambda=(1/4)-r^2\}$ de $\Delta_{M_\infty}$ tandis que le membre de droite est égal à :

$$\frac{1}{2s-1}\sum_{\{C\}_0}l(C)\,e^{-l(C)s}$$

plus un terme holomorphe sur $\operatorname{Re}s>1/2$. Ainsi, $\Sigma\, l(C)\,e^{-l(C)s}$ se prolonge holomorphiquement sur $\{\operatorname{Re}s>\delta_{M_\infty}\}$ avec une singularité polaire simple en $\delta_{M_\infty}$. Le théorème 2 est obtenu alors en appliquant le théorème taubérien de Wiener-Ikehara.

Remise le 4 février 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Colloque en l'honneur de L. Schwartz, 1984. *Astérisque* (à paraître).
[2] G. GRUBB, *Duke Math. J.*, 51, 1984.
[3] D. HEJHAL, *Lecture Notes in Math.*, n° 548, 1976; n° 1001, 1983, Springer.
[4] A. SELBERG, *J. Indian Math. Soc.*, 20, 1956, p. 47-87.
[5] B. SIMON, *Adv. in Math.*, 30, 1978, p. 268-281.
[6] D. SULLIVAN, *Publications Math. I.H.E.S.*, 1979, p. 419-450.

*Laboratoire de Mathématiques pures associé au C.N.R.S.,*
*Institut Fourier*, B. P. n° 74, 38402 *Saint-Martin-d'Hères Cedex.*