Vol. 53, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © September 1986

SUR LA DISTRIBUTION DES LONGUEURS DES GEODESIQUES FERMEES D'UNE SURFACE COMPACTE A BORD TOTALEMENT GEODESIQUE

LAURENT GUILLOPE

0. Introduction. Soit S une surface riemannienne orientable à courbure constante -1 et notons $\pi_S(x)$ le nombre de géodésiques fermées primitives de S de longueur au plus égale à x. Si S est d'aire finie sans bord, on a l'asymptotique

$$(0.1) \qquad \pi_S(x) \sim e^x/x, \qquad x \to \infty \ ([8],[10]).$$

Cet article présente des asymptotiques analogues dans le cas d'une surface compacte D, à bord ∂D totalement géodésique non vide.

Par arc géodésique de D nous entendrons soit un arc du bord de D soit un arc C^1 par morceaux, géodésique en l'intérieur de D et qui, en ses points de ∂D, obéit à la réflexion géométrique. Nous distinguerons les géodésiques fermées de D suivant qu'elles ont un nombre nul, pair, impair de réflexions sur le bord et nous noterons π_0, π_p, π_i les fonctions de comptage correspondantes.

L'asymptotique de π_0 s'obtient en fait en étudiant la fonction de comptage associée à la surface S_∞ (d'aire infinie et à rayon d'injectivité strictement positif) obtenue en recollant à chaque composante C_j ($j = 1, \ldots, N$) de longueur $l_j = l(C_j)$ du bord de D une vasque hyperbolique V_{l_j} (V_l est le demi-cylindre $(\mathbf{R}/l\mathbf{Z})_v \times \mathbf{R}^+_\tau$ avec la métrique $ds^2 = \mathrm{ch}^2\tau\, dv^2 + d\tau^2$). On a simplement $\pi_{S_\infty}(x) = \pi_0(x) + N$ si $x > \mathrm{Sup}_{j=1,\ldots,N}(l_j)$. Introduisons l'exposant de Poincaré δ_{S_∞} de S_∞, défini comme l'abscisse de convergence (en fait indépendante des points m, m' de S_∞) des séries $\Sigma e^{-sl(C)}$ où la somme porte sur toutes les géodésiques lisses C de m à m'. Cet exposant est non nul, strictement inférieur à 1 (cf. § 1).

THEOREME 1. *Si l'exposant de Poincaré δ_{S_∞} est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, on a $\pi_{S_\infty}(x) \sim e^{\delta_{S_\infty} x}/\delta_{S_\infty} x$, $x \to \infty$.*

On a évidemment $\pi_D = \pi_p + \pi_i$. Les asymptotiques de π_p, π_i, bien que non formellement établis dans la littérature à notre connaissance, y sont néanmoins

Received May 31, 1985. Revision received December 30, 1985.

implicites ([18]). Avec le théorème 1, on obtient les asymptotiques des fonctions de comptage associées à D:

THEOREME 2.
A. $\pi_p(x) \sim \pi_i(x) \sim e^x/2x,\ x \to \infty$.
B. *Si l'exposant de Poincaré* δ_{S_∞} *est strictement supérieur à* $\frac{1}{2}$ *on a* $\pi_0(x) \sim e^{\delta_{S_\infty} x}/\delta_{S_\infty} x,\ x \to \infty$.

Nos démonstrations reposent sur les idées de Selberg ([14]), appliquées par exemple dans [6] à l'asymptotique de π_M où M est un quotient compact orientable, sans bord d'un espace symétrique à courbure strictement négative par un groupe discret uniforme d'isométries: il s'agit d'écrire des formules de trace pour des opérateurs classiques définis sur les surfaces S_∞, D, formules reliant leur spectre à celui des longueurs des géodésiques fermées.

En ce qui concerne S_∞, quotient du plan hyperbolique H par un groupe d'isométries hyperboliques Γ_∞, la situation diffère de [14] par la non compacité de S_∞ et l'existence d'une partie absolument continue dans le spectre du laplacien Δ_{S_∞} sur les fonctions. Ainsi aucun opérateur classique (tel celui de la chaleur ou une puissance de résolvante) construit à partir de Δ_{S_∞} n'est à trace. On introduit alors le laplacien $\Delta_{S_\infty - \partial D}$ (avec conditions de Dirichlet sur ∂D) et la première étape consiste à établir la propriété de trace pour les opérateurs $f(\Delta_{S_\infty}) - f(\Delta_{S_\infty - \partial D})$, la fonction f étant convenablement choisie. Pour l'opérateur de la chaleur ($f_t(\mu) = e^{-t\mu}$), cela résulte d'estimations sur les noyaux de la chaleur (dont certaines sont classiques [2], [5]), pour la résolvante ($f_\lambda(\mu) = (\mu - \lambda)^{-1}$) on utilise essentiellement les résultats de Grubb ([7]) sur les propriétés de trace des opérateurs de Green singuliers (apparaissant dans l'étude de problèmes aux limites [1]). Ces points d'analyse une fois établis, les formules de trace résultent alors d'abord pour l'opérateur de la chaleur de calculs classiques ([12], [14]), puis pour la résolvante d'une transformée de Laplace.

Les fonctions de comptage π_p, π_i sont liées, pour leur part, aux laplaciens Δ_+, Δ_- resp. sur D (quotient de H par un groupe Γ contenant des isométries indirectes) avec conditions de Neumann, Dirichlet resp.. Les propriétés de trace de ces opérateurs, ainsi que les formules de trace associées, sont facilement obtenues.

Les théorèmes 1, 2 découlent alors des formules de trace sur les résolvantes en appliquant le théorème taubérien d'Ikehara.

Après un paragraphe de notations et de rappels de résultats éparpillés dans la littérature, les paragraphes 2 à 4 sont consacrés à la démonstration du théorème 2 (dont la partie **B** est le théorème 1): § 2 opérateur de la chaleur, § 3 résolvante, § 4 théorème d'Ikehara et démonstration du théorème 2. Chacun de ces paragraphes est divisé en deux parties, correspondant aux résultats **A** et **B** du théorème 2. Grosso-modo, la partie **A** contient les calculs plus ou moins classiques, de nature plutôt algébrique ([12], [14]) alors que la partie **B** est surtout consacrée à l'analyse des propriétés de trace des opérateurs définis sur S_∞. Le paragraphe 5 conclut par quelques remarques.

1. Préliminaires

1.1. *Surfaces et groupes.* La surface S_∞ est le quotient de l'espace hyperbolique H (dont nous prendrons pour modèle le demi-plan de Poincaré $H = \{z = x + iy;\ x \in \mathbf{R},\ y > 0\}$) par un sous-groupe discret Γ_∞ d'isométries directes. Ce groupe Γ_∞ est de type fini, puisqu'il est isomorphe au groupe fondamental de D, rétracte de S_∞. Ainsi, d'après [13], il existe un polygone géodésique fondamental P_∞ pour l'action de Γ_∞ sur H dont le bord est réunion finie d'arcs géodésiques appariés ($\partial D = \{(\alpha_i, \alpha_i')\}$) de sorte qu'il existe des transformations γ_i de Γ_∞ identifiant α_i à α_i' et constituant un système de générateurs de Γ_∞.

Notons β_j le segment géodésique s'appuyant perpendiculairement sur α_j et α_j' si ceux-ci sont de longueur infinie, σ_j la symétrie par rapport à la droite portant β_j, Γ le groupe engendré par les γ_i et les σ_j, $\tilde{\alpha}_i$ le segment α_i (resp. le segment de α_i limité par son extrémité à distance finie et le pied de β_i) si α_i est de longueur finie (resp. infinie). Alors l'ensemble $\{\tilde{\alpha}_i, \beta_j\}$ est le bord d'un polygone convexe compact P et d'après le théorème de Poincaré-Maskit ([10]), le groupe Γ est discret, P en est un polygone fondamental pour son action sur H et H/Γ s'identifie naturellement avec la variété à bord D. On notera P_j le polygone (isométrique à $\mathscr{C}(l_j)$ cf. 1.3) se projetant sur V_{l_j} et Γ_j le groupe engendré par γ_j.

En outre, si Γ_+ note le sous-groupe d'indice 2 des isométries directes de Γ, le quotient H/Γ_+ s'identifie avec la surface compacte sans bord S, double de D et si σ_{j_0} est une des symétries $\{\sigma_j\}$, $P_+ = P \cup \sigma_{j_0}P$ est un polygone fondamental pour l'action de Γ_+. Tous les éléments de Γ_+ sont de type hyperbolique.

1.2. *Géodésiques.* Les classes de conjugaison $[\gamma]$ de Γ_+ correspondent de manière biunivoque aux géodésiques lisses fermées de $S = H/\Gamma_+$: l'axe d'un élément de $[\gamma]$ se projette (par la projection p: $H \to H/\Gamma_+$) sur la géodésique correspondante; la géodésique est primitive si et seulement si l'élément γ est primitif (γ est dit primitif dans Γ si tout élément de Γ dont γ est une puissance est soit γ, soit γ^{-1}).

Avant d'établir une correspondance analogue pour D, rappelons la structure des isométries indirectes de H: une telle isométrie γ laisse une droite A (qu'on appellera son axe) globalement invariante et, à moins de coïncider avec la symétrie σ_A d'axe A, γ est la composée de σ_A et d'une transformation hyperbolique γ_A d'axe A. Dans ce dernier cas, le multiplicateur de γ sera par définition celui de γ_A. Observons que deux isométries de Γ commutent si et seulement si elles ont même axe (ou bien si et seulement si elles ont mêmes points fixes à l'infini), ce qui nous permettra de parler de l'axe du centralisateur $Z(\gamma)$ de γ dans Γ ($Z(\gamma) = \{\theta \in \Gamma/\theta\gamma = \gamma\theta\}$).

On a alors une correspondance biunivoque entre les classes de conjugaison de centralisateurs d'éléments de Γ et les géodésiques fermées primitives de D, l'axe du centralisateur se projetant sur la géodésique. Précisons les différents types de centralisateurs:

(i) l'axe A du centralisateur Z se projette sur une géodésique C de longueur $l(C)$ du bord de D. Alors le centralisateur est engendré par la symétrie d'axe A et la transformation hyperbolique d'axe A, de multiplicateur $e^{l(C)}$.

(ii) l'axe A du centralisateur Z se projette sur une géodésique intérieure à D. Alors le centralisateur est monogène, engendré par une isométrie directe (resp. indirecte) de multiplicateur $e^{l(C)}$ (type $(\mathrm{ii})_p$ resp. $(\mathrm{ii})_i$).

Soit Z de type (ii), de générateur γ. On peut supposer, au besoin après conjugaison par un élément de Γ, que l'axe $A(\gamma)$ de γ contient un point z_0 de P. Considérons la suite finie (P_l) des domaines translatés de $P_0 = P$ le long de A_γ de z_0 à γz_0. On écrit ainsi $\gamma = \prod \tilde{\gamma}_l$ où $\tilde{\gamma}_l P_l = P_{l+1}$ et $\tilde{\gamma}_l$ est conjugué à un des générateurs de Γ. Le passage de P_l à P_{l+1} correspond à une réflexion de C sur le bord de D si et seulement si $\tilde{\gamma}_l$ est une symétrie. On en déduit que la géodésique primitive C de D associée à Z a un nombre pair (resp. impair) de réflexions si et seulement si γ est direct (resp. indirect). Remarquons enfin qu'une géodésique primitive de D avec un nombre impair (resp. pair) de réflexions se relève sur S en une géodésique primitive de longueur double (resp. de même longueur) et invariante (resp. non invariante) en tant que géodésique orientée par la symétrie σ (telle que $D \simeq S/\sigma$).

LEMME 1.1. *Soit $\bar{\pi}_D(x)$ le nombre des géodésiques fermées (non nécessairement primitives) de D, de longueur au plus égale à x. On a*

$$\bar{\pi}_D(x) = O(e^x), \qquad x \to \infty. \tag{1.1}$$

Preuve. A une géodésique fermée C correspond de manière injective une transformation $\gamma(C)$ de Γ, de multiplicateur $e^{l(C)}$ et dont l'axe rencontre P. La réunion disjointe $\bigcup_{l(C) \leqslant x} \gamma(C)P$ est incluse dans la boule centrée en z_0 (point arbitraire de P), et de rayon $x + 2d$ (où d est le diamètre de P) et dont le volume est un $O(e^x)$. La comparaison des volumes de ces deux ensembles permet de conclure.

1.3. *Coordonnées de Fermi.* Sur la demi-bande $\mathscr{C}(l) = \{z \in H \mid 1 \leqslant |z| \leqslant e^l, \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ on utilisera les coordonnées de Fermi (v, τ) associées à la géodésique Oy pointée au point i:

$$\tau = d(z, Oy), \qquad x = e^v \operatorname{th} \tau, \qquad y = e^v/\operatorname{ch} \tau, \qquad v \in [0, l], \qquad \tau \in [0, \infty[$$

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2 = d\tau^2 + \operatorname{ch}^2\tau \, dv^2, \qquad d\mu(z) = dx\, dy/y^2 = \operatorname{ch} \tau \, dv \, d\tau.$$

1.4. *Noyau de la chaleur.* Le noyau de la chaleur E sur le demi-plan hyperbolique H est donné explicitement ([12]) par

$$E(t, z, z') = \frac{\sqrt{2}\, e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_a^\infty \frac{b e^{-b^2/4t}}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a}} \, db \tag{1.2}$$

avec $a = d(z, z')$.

Avec de faibles hypothèses sur la géométrie d'une variété M, de nombreux auteurs ([2], [4]) obtiennent des estimées sur le noyau de la chaleur associé à M. Une telle estimée dans le cas $M = H$ s'obtient directement de l'expression explicite (1.2) grâce au lemme suivant:

LEMME 1.2. *Pour toute constante $D < \frac{1}{4}$, il existe une constante C telle que*

$$\int_a^\infty \frac{be^{-b^2/4t}}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a}}\, db \leqslant C\sqrt{t}\, e^{-Da^2/t}, \qquad t > 0. \tag{1.3}$$

Preuve. Ecrivons $\int_a^\infty be^{-b^2/4t}/\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a}\, db = I_1(a) + I_2(a)$ avec

$$I_1(a) = \int_a^{a+1} \frac{be^{-b^2/4t}}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a}}\, db.$$

On a

$$I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_a^{a+1} \frac{be^{-b^2/4t}}{\sqrt{\operatorname{sh}((b-a)/2) \cdot \operatorname{sh}((b+a)/2)}}\, db$$

$$\leqslant \sqrt{2} \int_a^{a+1} \frac{be^{-\varepsilon b^2/t}}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-Da^2/t}\, db$$

avec $\varepsilon = \frac{1}{4} - D$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_a^{a+1} \frac{be^{-b^2/4t}}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, db \leqslant (2a+1)^{1/2} e^{-\varepsilon(a+1)^2/t} + 2\varepsilon t^{-1} \int_a^{a+1} \sqrt{b^2 - a^2}\, be^{-\varepsilon b^2/t}\, db$$

$$\leqslant t^{1/2}\sqrt{2} \operatorname*{Sup}_{b \geqslant 0} be^{-\varepsilon b^2} + 2\varepsilon \int_0^\infty b^2 e^{-\varepsilon b^2}\, db$$

soit $I_1(a) \leqslant C_1(\varepsilon) t^{1/2} e^{-Da^2/t}$. D'autre part

$$I_2(a) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a+1}^\infty \frac{be^{-b^2/4t}\, db}{\sqrt{\operatorname{sh}((b-a)/2) \cdot \operatorname{sh}((b+a)/2)}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sh}(\frac{1}{2})}} \int_{a+1}^\infty \frac{b\, db}{\sqrt{\operatorname{sh}(b/2)}} e^{-(a+1)^2/t}$$

soit $I_2(a) \leqslant C_2 e^{-(1+a)^2/t}$. Le lemme en résulte.

1.5. *Exposant de Poincaré*

Definition 1.3. Soit $\hat{\Gamma}$ un groupe fuchsien. L'exposant de Poincaré $\hat{\delta}$ de $\hat{\Gamma}$ est l'abscisse de convergence de la série $\sum_{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}} e^{-s\, d(z,\hat{\gamma}z')}$ (cette abscisse est indépendante des points z et z' de H).

L'exposant de Poincaré d'une surface sans bord à courbure constante négative, défini dans l'introduction, coïncide avec l'exposant de Poincaré du groupe des automorphismes de son revêtement universel. Pour la surface à bord D, suivant qu'on considère les arcs géodésiques de D sans ou avec réflexions sur le bord, l'exposant de Poincaré géométrique (i.e. au sens de la définition de l'introduction) coïncide avec l'exposant de Poincaré du groupe Γ_∞ ou du groupe Γ_+.

Pour un groupe $\hat{\Gamma}$ tel que $H/\hat{\Gamma}$ soit d'aire finie, $\hat{\delta}$ vaut 1. Si $\hat{\Gamma}$ est de type fini, non élémentaire avec $H/\hat{\Gamma}$ d'aire infinie, $\hat{\delta}$ (a fortiori donc δ_{S_∞}) est non nul, strictement inférieur à 1. Rappelons le résultat suivant ([4], [13], [17]).

PROPOSITION 1.4. *Si l'exposant de Poincaré $\hat{\delta}$ du groupe $\hat{\Gamma}$ de type fini est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, alors $\hat{\delta}(1-\hat{\delta})$ est la plus petite valeur propre du laplacien Δ sur $H/\hat{\Gamma}$ (le spectre continu de Δ, s'il existe, est $[\frac{1}{4},\infty[$):*

On utilisera le lemme suivant:

LEMME 1.5. *Soit $\hat{\Gamma}$ tel que $H/\hat{\Gamma}$ ait un rayon d'injectivité non nul. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}} e^{-(1+\varepsilon)\, d(z,\hat{\gamma}z')}$ est uniformément convergente pour z, z' dans H.*

Preuve. Notons $N_{z,z'}(R) = \#\{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}/d(\hat{\gamma}z,z')\leqslant R\}$. Le rayon d'injectivité de $H/\hat{\Gamma}$ est inj $= \mathrm{Inf}_{z\in H,\,\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}-\{Id\}}\, d(z,\hat{\gamma}z)$. Observant que, pour $\alpha < \mathrm{inj}/2$, les boules $(B(\hat{\gamma}z,\alpha))_{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}}$ (de centre $\hat{\gamma}z$ et de rayon α) sont disjointes deux à deux, on obtient de manière analogue au lemme 1.1 la majoration uniforme $N_{z,z'}(R)\leqslant Ce^R$ pour z, z' dans H. On en déduit, si $D_n(z,z') = \{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}/d(z,\hat{\gamma}z')\in[n,n+1]\}$.

$$\sum_{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}} e^{-(1+\varepsilon)\,d(z,\hat{\gamma}z')} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\hat{\gamma}\in D_n(z,z')} e^{-s\,d(z,\hat{\gamma}z')} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} Ce^{n+1}e^{-(1+\varepsilon)n} < \infty.$$

2. Sur les opérateurs de la chaleur

A. On a noté Δ_+ (resp. Δ_-) le laplacien de D avec conditions de Neumann (resp. Dirichlet) sur le bord. L'opérateur $e^{-t\Delta_\pm}$ est un opérateur régularisant sur une variété compacte, sa trace est ainsi obtenue en intégrant sur la diagonale son noyau:

$$E_\pm(t,m,m') = \sum_{\gamma\in\Gamma_+} E(t,z,\gamma z') \pm \sum_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_+} E(t,z,\gamma z')$$

(où on a noté, si $p\colon H\to H/\Gamma$ est la projection canonique, z, z' des points de H

tels que $p(z) = m$, $p(z') = m'$ et E le noyau de la chaleur sur H). On a donc

$$\operatorname{Tr} e^{-t\Delta_\pm} = \int_P \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma_+} E(t, z, \gamma z) \pm E\left(t, z, \sigma_{j_0}\gamma z\right) \right\} d\mu(z).$$

On effectue une sommation par paquets correspondants aux classes de conjugaison $[\gamma]$ de Γ; chaque paquet est transformé en une intégrale sur le domaine fondamental $\mathscr{D}(Z(\gamma))$ du centralisateur $Z(\gamma)$ de γ.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} e^{-t\Delta_\pm} = &\int_P E(t, z, z)\, d\mu(z) \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \int_{\mathscr{D}(Z(\sigma_j))} \left\{ E\left(t, z, \gamma_j^k z\right) \pm E\left(t, z, \sigma_j \gamma_j^k z\right) \right\} d\mu(z) \right. \\ &\qquad\qquad \left. \pm \int_{\mathscr{D}(Z(\sigma_j))} E(t, z, \sigma_j z)\, d\mu(z) \right\} \\ &+ \sum_{\{[\gamma]\}_p} \sum_{k \geqslant 1} \int_{\mathscr{D}(Z(\gamma))} E\left(t, z, \gamma^k z\right) d\mu(z) \\ &+ \sum_{\{[\gamma]\}_i} \left\{ \sum_{k \geqslant 1} \int_{\mathscr{D}(Z(\gamma))} \left\{ E\left(t, z, \gamma^{2k} z\right) \pm E\left(t, z, \gamma^{2k-1} z\right) \right\} d\mu(z) \right\}.\end{aligned}$$

La première somme représente les contributions des composantes du bord de D (éléments de Γ de type (i)), la seconde (resp. la troisième) porte sur les classes de conjugaison des éléments de type $(\mathrm{ii})_p$ (resp. $(\mathrm{ii})_i$) et de leurs puissances.

Pour évaluer chaque terme, on utilise les formes normales des éléments de Γ et le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Soit θ la transformation hyperbolique d'axe Oy et de multiplicateur e^l* (i.e. $\theta z = e^l z$, $z \in H$), *σ la symétrie d'axe Oy* (i.e. $\sigma z = \bar{z}$, $z \in H$) *et $B(l) = \{z \in H / 1 \leqslant |z| \leqslant e^l\}$.*

$$(2.1)\quad I_k^1(\theta) = \int_{B(l)} E\left(z, \theta^k z, t\right) d\mu(z) = \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-(kl)^2/4t}}{\operatorname{sh}(kl/2)} l, \qquad k \in \mathbf{Z}^*$$

$$(2.2)\quad I_k^2(\theta) = \int_{B(l)} E\left(z, \sigma\theta^k z, t\right) d\mu(z) = \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-(kl)^2/4t}}{\operatorname{ch}(kl/2)} l, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Preuve. En prenant les coordonnées de Fermi (v, τ) relativement à l'axe Oy pointé en $z_0 = i$, on a

$$\operatorname{ch} d(z, \theta^k z) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(kl/2)\operatorname{ch}^2\tau$$

$$\operatorname{ch} d(z, \sigma\theta^k z) = 1 + 2\left[\operatorname{ch}^2(kl/2)\operatorname{sh}^2\tau + \operatorname{sh}^2(kl/2)\right].$$

Ainsi, vu (1.2), on obtient

$$I_k^i = \frac{2\sqrt{2}\,e^{-t/4}}{4\pi t}\int_0^l\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau \int_{a_i(\tau)}^\infty \frac{be^{-b^2/4t}}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a_i(\tau)}}\,db\,d\tau\,dv,$$

où $\operatorname{ch} a_1(\tau) = 1 + \operatorname{sh}^2(kl/2)\operatorname{ch}^2\tau$, $\operatorname{ch} a_2(\tau) = 1 + 2[\operatorname{ch}^2(kl/2)\operatorname{sh}^2\tau + \operatorname{sh}^2(kl/2)]$. Un changement ce variable ($v = \operatorname{sh}\tau$) et une interversion d'intégrales donnent

$$I_k^i = \frac{2\sqrt{2}\,e^{-5/4}}{4\pi t}\int_{a_i(0)}^{+\infty} be^{-b^2/4t}\int_0^{v_i(b)} \frac{dv}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a_i(v)}}\,db,$$

intégrale qui est calculée de manière élémentaire.

On obtient ainsi la formule de trace:

Proposition 2.2. *Pour $t > 0$, l'opérateur $e^{-t\Delta_\pm}$ est à trace et*

$$\text{(2.3)}\quad \operatorname{Tr} e^{-t\Delta_\pm} = \operatorname{vol}(D)P(t)$$

$$+ \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{j=1}^N l_j \sum_{k=1}^\infty 2\frac{e^{-(kl_j)^2/4t \pm kl_j/2}}{\operatorname{sh}(kl_j)} \pm \frac{\operatorname{vol}(\partial D)}{2}\right.$$

$$+ \sum_{\{C\}_p} l(C) \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-(kl(C))^2/4t}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)}$$

$$\left. + \sum_{\{C\}_i} l(C) \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{e^{-(kl(C))^2/t}}{\operatorname{sh}(kl(C))} \pm \frac{e^{-((2k-1)l(C)^2/4t}}{\operatorname{ch}(k - \frac{1}{2})l(C)}\right)\right\}$$

où on a noté $P(t) = (e^{-t/4}/(4\pi t)^{3/2})\int_0^\infty b/\operatorname{sh}(b/2)e^{-b^2/4t}\,db$ et la première (resp. seconde, troisième) somme porte sur les composantes du bord ∂D (resp. les géodésiques primitives avec un nombre impair, resp. pair de réflexions).

Remarque 2.3. Mise à part la somme $\operatorname{vol}(D)P(t) \pm \operatorname{vol}(\partial D)(e^{-t/4}/8\sqrt{\pi t})$, le terme de droite de (2.3) est à décroissance exponentielle lorsque $t \to 0^+$. On déduit le développement (dit de Minakshisundaram-Pleijel)

$$\operatorname{Tr} e^{-t\Delta_\pm} \sim \sum_{i=0}^\infty a_i^\pm t^{-1+i/2} \qquad (t \to 0^+)$$

avec

$$a_i^+ = (-1)^i a_i^-, \qquad a_0^+ = \mathrm{vol}(D)/4\pi \quad \text{et} \quad a_1^+ = \mathrm{vol}(\partial D)/8\sqrt{\pi}.$$

Remarque 2.4. On retrouve bien la formule de trace pour la surface S en faisant la somme $\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_+} + \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_-}$ ($= \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_S}$).

B. Notons Δ_{S_∞} le laplacien sur S_∞ et $\Delta_{S_\infty - D}$ le laplacien sur $S_\infty - D$ avec conditions de Dirichlet sur son bord ∂D. En général si N est une partie de M et si $E = E(N)$ (resp. $P = P(N)$) est l'injection naturelle de $L^2(N)$ dans $L^2(M)$ (resp. la projection duale), on ne distinguera pas A, notant un opérateur borné de $L^2(N)$, et l'opérateur EAP de $L^2(M)$. Cette convention apparaît par exemple dans la proposition suivante, essentielle pour la suite.

PROPOSITION 2.5.
(i) *Pour tout $t > 0$, l'opérateur $\tilde{E}_\infty(t) = e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{S_\infty - D}}$ est à trace.*
(ii) *Soit ϕ une fonction C^∞ sur S_∞ à support compact et valant* 1 *au voisinage de D. Notons $\| \ \|_{\mathrm{tr}}$ la norme trace. Il existe des constantes C_1, C_2, C_3 positives telles que*

$$(2.4) \qquad \|(1-\phi)\tilde{E}_\infty(t)(1-\phi)\|_{\mathrm{tr}} \leqslant C_1 e^{C_2 t} e^{-C_3/t}, \qquad t > 0.$$

Preuve. Introduisons les fonctions ψ, ψ_j ($j = 1, \ldots, N$) telles que $1 - \phi = \psi = \sum_{j=1}^N \psi_j$, où ψ_j est à support dans V_{l_j}, pour écrire:

$$\tilde{E}_\infty(t) = \phi\tilde{E}_\infty(t) + \psi\tilde{E}_\infty(t)\phi + \psi\tilde{E}_\infty(t)\psi.$$

Les opérateurs $e^{-t\Delta_{S_\infty}}, e^{-t\Delta_{S_\infty - D}}$ étant régularisantes et ϕ à support compact, l'opérateur $\phi\tilde{E}_\infty(t)$ ainsi que son adjoint, et donc les deux premiers termes du membre de droite de (2.4), sont à trace.

En ce qui concerne le troisième terme, nous allons utiliser la propriété de semi-groupe de l'opérateur de la chaleur (de manière analogue à [16]) pour le mettre sous la forme d'une somme de produits d'opérateurs Hilbert-Schmidt.

Soit m_0 un point de D, κ_0 la fonction définie sur S_∞ par $\kappa_0(m) = \exp(d(m, m_0))$ et χ_j ($j = 1 \ldots N$) la fonction caractéristique de V_{l_j}. On a

$$(2.5) \qquad \psi\tilde{E}_\infty(t)\psi = \sum_{j=1}^N \psi_j\left(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}\right)\psi_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}\psi_i,$$

$$e^{-2t\Delta_{S_\infty}} - e^{-2t\Delta_{V_{l_j}}} = e^{-t\Delta_{S_\infty}}\left(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}\right) + \left(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}\right)e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}.$$

Ce qui nous permet de réécrire (2.5) suivant

$$\begin{aligned}\psi\tilde{E}_\infty(2t)\psi = &\sum_{j=1}^{N}\left(\psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}\kappa_0^{-1}\right)\left(\kappa_0[e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}]\psi_j\right)\\ &+\sum_{j=1}^{N}\left(\psi_j[e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}]\kappa_0\right)\left(\kappa_0^{-1}e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}\psi_j\right)\\ &+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}\left(\psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}\kappa_0^{-1}\right)\left(\kappa_0\chi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}\psi_i\right)\\ &+\left(\psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}(1-\chi_j)\kappa_0\right)\left(\kappa_0^{-1}e^{-t\Delta_{S_\infty}}\psi_i\right).\end{aligned}$$

La proposition résulte alors des deux lemmes suivants:

LEMME 2.6. *Notons V une des vasques V_{l_j}, C la géodésique bordante et Δ_V le laplacien sur V avec conditions de Dirichlet sur C. Alors il existe des constantes positives K_1, K_2, K_3 telles que*

$$\left|e^{-t\Delta_{S_\infty}}(m,m')\right| \leqslant K_1 t^{-1}e^{K_2 t}e^{-K_3\, d(m,m')^2/t}, \qquad m, m' \in S_\infty \tag{2.6}$$

$$\left|(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_V})(m,m')\right| \leqslant K_1 t^{-1}e^{K_2 t - K_3(d(m,C)^2 + d(m',C)^2)/t}, \qquad m \in S_\infty,\quad m' \in V. \tag{2.7}$$

$$\left|e^{-t\Delta_V}(m,m')\right| \leqslant K_1 t^{-1}e^{K_2 t}e^{-K_3\, d(m,m')^2/t}, \qquad m, m' \in V. \tag{2.8}$$

LEMME 2.7.

(a) *Les opérateurs $\psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}(1-\chi_j)$, $\psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}\kappa_0^{-1}$, $\psi_j e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}\kappa_0^{-1}$, $\kappa_0(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}})\psi_j$, $\kappa_0^{-1}\chi_j e^{-t\Delta_V}\psi_i$ $(i \neq j)$ sont de classe Hilbert-Schmidt.*

(b) *Notons $\| \; \|_2$ la norme Hilbert-Schmidt. Il existe des constantes positives K_1', K_2', K_3' telles que:*

$$\sup_{\substack{i,j=1\cdots N\\ i\neq j}}\left\{\left\|\kappa_0(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_i}}})\psi_i\right\|_2, \left\|\psi_i e^{-t\Delta_{S_\infty}}(1-\chi_i)\kappa_0\right\|_2, \left\|\psi_i e^{-t\Delta_{S_\infty}}\kappa_0\chi_j\right\|_2\right\}$$

$$\leqslant K_1' t^{-1}e^{K_2' t}e^{-K_3'/t}$$

$$\sup_{j=1\cdots N}\left\{\left\|\psi_j e^{-t\Delta_{S_\infty}}\kappa_0\right\|_2, \left\|\kappa_0^{-1}e^{-t\Delta_{V_{l_j}}}\psi_j\right\|_2\right\} \leqslant K_1' t^{-1}e^{K_2' t}.$$

Preuve du lemme 2.6. Nous allons prouver (2.7), les autres estimations se prouvant de manière analogue (elles sont en fait très générales [2], [5]).

Soit Γ_V le sous-groupe de Γ_∞ engendré par l'élément $\gamma_V = \gamma_j$ si $V = V_{l_j}$. On peut supposer que le domaine fondamental P_∞ de Γ_∞ est tel que sa partie P_j représentant V soit la demi-bande $\mathscr{C}(l(C))$ ($l(C) = l_j$); γ_V est donc la transformation $\gamma_V z = e^{l(C)}z$ et l'axe Oy, axe de la symétrie σ_V ($\sigma_V z = -\bar{z}$), se projette sur C. Le noyau N de $e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_V}$ est donné par

$$N(m,m') = \begin{cases} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty-\Gamma_V} E(t,z,\gamma z') + \sum_{\gamma\in\Gamma_V} E(t,z,\sigma_V\gamma z'); & m, m' \in V \\ \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty} E(t,z,\gamma z'); & m \in S_\infty - V, \quad m' \in S_\infty. \end{cases}$$

Utilisant l'estimation (1.3) nous obtenons:

$$N(m,m') \leqslant \begin{cases} Ct^{-1}e^{-t/4}\left\{ \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty-\Gamma_V} e^{-D_0 d(z,\gamma z')^2/t} + \sum_{\gamma\in\Gamma_V} e^{-D_0 d(z,\sigma_V\gamma z')^2/t} \right\}, \\ \qquad\qquad m, m' \in V \\ Ct^{-1}e^{-t/4} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty} e^{-D_0 d(z,\gamma z')^2/t}, \quad m \in S_\infty - V, \quad m' \in V. \end{cases}$$

Introduisons D_1, D_2 positifs non nuls tels que $D_0 = D_1 + D_2$ et la fonction δ définie par

$$\delta(z,z') = \begin{cases} \operatorname{Inf}_{\gamma\in\Gamma_\infty-\Gamma_V,\, \phi\in\Gamma_V} \{d(z,\gamma z'), d(z,\phi\sigma_V z')\}, & z, z' \in \mathscr{C}(l(C)) \\ \operatorname{Inf}_{\gamma\in\Gamma_\infty} \{d(z,\gamma z')\}, \quad z \in P_\infty - \mathscr{C}(l(C)), & z' \in \mathscr{C}(l(C)). \end{cases}$$

Remarquons alors:

(i) Soient $z, z' \in \mathscr{C}(l(C))$, $\gamma \in \Gamma_\infty - \Gamma_V$ et $k \in \mathbf{Z}$. Les points $\gamma z'$ et $\gamma_V^k\sigma_V z'$ sont dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z \leqslant 0\}$, ainsi $d(z,\gamma z')$ et $d(z,\gamma_V^k\sigma_V z')$ sont-ils au moins égal à $d(z,Oy) = d(m,C)$. Par symétrie on obtient

$$2\delta(z,z')^2 \geqslant d(m,C)^2 + d(m',C)^2, \qquad m, m' \in V.$$

(ii) Si $m \in S_\infty - V$ et $m' \in V$, $\delta(z,z') = d(m,m')$. Les points m et m' sont de part et d'autre de la géodésique C et donc $d(m,m') \geqslant d(m,C) + d(m',C)$ soit encore $2\delta(z,z')^2 \geqslant d(m,C)^2 + d(m',C)^2$.

(iii) $d(z,\sigma_V\gamma_V^k z') \geqslant d(z,\gamma^k z')$ si $z, z' \in \mathscr{C}(l(C))$.

(iv) $e^{-D_2 d^2/t} \leqslant e^{t/D_2}e^{-2d}$.

On en déduit

$$N(m, m') \leqslant Ct^{-1}e^{-t/4+t/D_2}e^{-D_1\delta(z,z')^2/t} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty} e^{-2\,d(z,\gamma z')}.$$

Le dernier facteur est majoré uniformément par rapport à z et z' d'après le lemme 1.5; l'estimation (2.7) en résulte.

Preuve du lemme 2.7. Il suffit de démontrer que les noyaux des différents opérateurs cités sont dominés par des noyaux de carré intégrable, dont la norme L_2 fournira les estimées du corollaire. Montrons comment ce principe fonctionne pour l'opérateur $\kappa_0(e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{V_{l_j}}})\psi_j$. D'après le lemme 2.6 son noyau est dominé par

$$B_t(m, m') = t^{-1}e^{K_2 t}\kappa_0(m)e^{-K_3\,d(m,C_j)^2/t}e^{-K_3\,d(m',C_j)^2/t}\psi_j(m').$$

L'intégrale $\int |B_t(m, m')|^2\, d\mu(m)\, d\mu(m')$ est le produit de deux intégrale qu'on majore facilement (on utilisera le fait que $\operatorname{Inf}\{d(m, C_j)/m \in \text{Support de } \psi_j\}$ est strictement positif).

PROPOSITION 2.8. *Pour $t > 0$, on a la formule de trace*

$$(2.9)\quad \operatorname{Tr}\{e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{S_\infty - D}}\}$$

$$= \operatorname{vol}(D)P(t) + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{j=1}^{N} l_j\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-(kl_j)^2/4t+kl_j/2}}{\operatorname{sh} kl_j}\right\}\right.$$

$$\left. + \operatorname{vol}(\partial D)/2 + \sum_{\{C\}_0} l(C)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-(kl(C))^2/4t}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)}\right\}$$

où la dernière somme porte sur toutes les géodésiques simples fermées de D ne rencontrant pas le bord.

Preuve. Soit (η_n) une suite croissante de fonctions à support compact convergeant simplement vers la fonction constante 1 sur S_∞: on a $\operatorname{Tr}\tilde{E}_\infty(t) = \lim_{n\to\infty}\operatorname{tr}(\eta_n\tilde{E}_\infty(t)\eta_n)$. Chaque terme de cette dernière somme est évaluée en prenant l'intégrale du noyau sur la diagonale; celui-ci étant positif

$$\tilde{E}_\infty(t, m, m) = \chi_D(m)\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty} E(t, z, \gamma z)\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\chi_j(m)\left\{\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty - \Gamma_j} E(t, z, \gamma z) + \sum_{\gamma\in\Gamma_j} E(t, z, \gamma\sigma_j z)\right\},$$

on a, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\operatorname{Tr} \tilde{E}_\infty(t) = \int_{S_\infty} \tilde{E}(t, m, m)\, d\mu(m).$$

Or

$$\tilde{E}_\infty(t, m, m) = \chi_D(m) E(t, z, z) + \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty - \{Id\}} E(t, z, \gamma z) + \sum_{j=1}^{N} \chi_j(m)$$
$$\times \left[\sum_{\gamma \in \Gamma_j - \{Id\}} \left\{ E(t, z, \gamma \sigma_j z) - E(t, z, \gamma z) \right\} + E(t, z, \sigma_j z) \right].$$

donc

$$\operatorname{Tr} \tilde{E}_\infty(t) = \int_P E(t, z, z)\, d\mu(z) + \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty - \{Id\}} \int_{P_\infty} E(t, z, \gamma z)\, d\mu(z)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{P_j} \left[\sum_{\gamma \in \Gamma_j - \{Id\}} \left\{ E(t, z, \gamma \sigma_j z) \right.\right.$$
$$\left.\left. - E(t, z, \gamma z) \right\} + E(t, z, \sigma_j z) \right] d\mu(z).$$

Les calculs se développent alors de manière classique et analogue à ceux menant à la proposition 2.2.

3. Sur les résolvantes

A. Vu que $\|e^{-t\Delta_\pm}\|_{\mathrm{tr}} = \operatorname{tr} e^{-t\Delta_\pm} \leqslant Ct^{-1}$, $t > 0$, l'égalité intégrale

$$(3.1) \qquad (\Delta_\pm - \lambda)^{-1} - (\Delta_\pm - \lambda_0)^{-1} = \int_0^\infty (e^{t\lambda} - e^{t\lambda_0}) e^{-t\Delta_\pm}\, dt$$

est vérifiée dans l'espace des opérateurs à trace pour $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Proposition 3.1. *Soit* $T_\pm(\lambda, \lambda_0) = (\Delta_\pm - \lambda)^{-1} - (\Delta_\pm - \lambda_0)^{-1}$ *avec* λ, λ_0 *hors du spectre de* $\Delta_\pm$, $\lambda = s(1-s)$, $\lambda_0 = s_0(1 - s_0)$ (*avec* $s > 1$ *si* λ *est réel négatif*). *Alors l'opérateur* $T_\pm(\lambda, \lambda_0)$ *est à trace et on a*

$$(3.2) \quad \operatorname{Tr} T_\pm(\lambda, \lambda_0) = \frac{\operatorname{vol}(D)}{2\pi} \left\{ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_0) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \right\} + F_\pm(s) - F_\pm(s_0)$$

avec

$$2(2s-1)F_{\pm}(s) = \sum_{j=1}^{N} 2l_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kl_j(s-1/2)\pm kl_j/2}}{\operatorname{sh}(kl_j)} \pm \frac{\operatorname{vol}(\partial D)}{2}$$

$$+ \sum_{\{C\}_p} l(C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kl(C)(s-1/2)}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)}$$

$$+ \sum_{\{C\}_i} l(C) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-2kl(C)(s-1/2)}}{\operatorname{sh}(kl(C))} \pm \frac{e^{-(2k-1)l(C)(s-1/2)}}{\operatorname{ch}((k-\frac{1}{2})l(C))} \right\}.$$

Preuve. L'opérateur $T_{\pm}(\lambda, \lambda_0)$ est à trace d'après (3.1). Grâce au principe du prolongement analytique, il suffit de montrer la formule de trace (3.2) pour λ réel négatif: celle-ci résulte de (2.3) et (3.1) par intégration terme à terme. L'intégration des termes autres que le premier dans le membre de droite de (2.3) s'effectue aisément en utilisant la formule

$$\int_0^{\infty} e^{-u} e^{-\alpha^2/u} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}\, e^{-2\alpha}, \qquad \alpha > 0. \tag{3.3}$$

En ce qui concerne le terme restant on a, en ayant posé $\mu = s - \frac{1}{2}$, $\mu_0 = s_0 - \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\infty} (e^{t\lambda} - e^{t\lambda_0}) P(t)\, dt = 2\sqrt{\pi}(4\pi)^{-3/2} \int_0^{\infty} \frac{b}{\operatorname{sh}(b/2)} \frac{e^{-b\mu} - e^{-b\mu_0}}{b}\, db$$

(par Fubini et 3.3)

$$= (2\pi)^{-1} \left\{ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s_0) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \right\},$$

où on a utilisé la formule de Gauss

$$\Gamma'/\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

Notons $T_i(\lambda) = (\Delta_+ - \lambda)^{-1} - (\Delta_- - \lambda)^{-1}$. L'opérateur $T_i(\lambda)$ est un opérateur de Green singulier d'ordre -2 donc il est à trace d'après [7]; il y est démontré que tout opérateur de Green singulier d'ordre $-m$ sur une variété compacte M^n de dimension n est de classe $\mathscr{I}_{(n-1)/m+\varepsilon}$ (pour tout $\varepsilon > 0$). (On se reportera à [15] pour la définition des idéaux $\mathscr{I}_p$). On sait qu'un opérateur pseudo-diférentiel d'ordre m sur M^n est de classe $\mathscr{I}_{n/m+\varepsilon}$ (pour tout $\varepsilon > 0$).

PROPOSITION 3.2. *Posons $\lambda = s(1-s)$. Alors l'opérateur $T_i(\lambda)$ est à trace et*

$$\text{(3.4)} \qquad \operatorname{Tr} T_i(\lambda) = \frac{1}{2s-1}\left\{ \sum_{j=1}^{N} l_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kl_j(s-1/2)}}{\operatorname{ch}(kl_j/2)} + \frac{\operatorname{vol}(\partial D)}{2} \right.$$

$$\left. + \sum_{\{C\}_i} l(C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(2k-1)l(C)(s-1/2)}}{\operatorname{ch}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)l(C)\right)} \right\}.$$

Preuve. On a $T_i(\lambda) - T_i(\lambda_0) = T_+(\lambda, \lambda_0) - T_-(\lambda, \lambda_0)$. Ainsi (3.4) résulte directement de (3.2), à un terme constant près. Le membre de droite tend vers 0 lorsque $s \to +\infty$. Pour montrer qu'il en est de même du terme de gauche, introduisons les fonctions de comptage $N_\pm$ associées aux spectres de $\Delta_\pm$: on a $N_\pm(\mu) = \operatorname{vol}(D)/(4\pi)\mu + O(\sqrt{\mu})$ $(\mu \to +\infty)$. Remarquant que $(\Delta_\pm - \lambda)^{-\varepsilon}$ est à trace pour tout $\varepsilon > 1$, nous montrons grâce au lemme suivant que

$$\operatorname{Tr} T_i(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 1^+} \operatorname{Tr}\left\{(\Delta_+ - \lambda)^{-\varepsilon} - (\Delta_- - \lambda)^{-\varepsilon}\right\} = \int_0^\infty \frac{N_+(\mu) - N_-(\mu)}{(\lambda-\mu)^2}\, d\mu$$

ce qui implique $\lim T_i(\lambda) = 0$ $(\lambda \to -\infty)$.

LEMME 3.3. *Soient A_1, A_2 des opérateurs auto-adjoints bornés strictement positifs dont la différence est à trace. Alors* $\operatorname{Tr}\{A_2 - A_1\} = \lim_{\varepsilon \to 1^+} \operatorname{Tr}\{A_2^\varepsilon - A_1^\varepsilon\}$.

Preuve. Si γ est un lacet indépendant de t entourant le spectre de $A_1 + t(A_2 - A_1)$ et contenu dans $\{\operatorname{Re} u > 0\}$, on a

$$(A_1 + t(A_2 - A_1))^\varepsilon = (2i\pi)^{-1} \int_\gamma u^\varepsilon (A_1 + t(A_2 - A_1) - u)^{-1}\, du,$$

ce qui permet de justifier l'égalité intégrale (valable en norme $\mathcal{J}_1$)

$$A_2^\varepsilon - A_1^\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon(A_2 - A_1)(A_1 + t(A_2 - A_1))^{\varepsilon - 1}\, dt.$$

Le lemme en résulte.

B. Notons $\overline{T}_\infty(\lambda) = (\Delta_S - \lambda)^{-1} - (\Delta_{S_\infty - \partial D} - \lambda)^{-1}$ et reprenons ϕ comme dans la proposition 2.5 pour écrire

$$\overline{T}_\infty(\lambda) = \phi \overline{T}_\infty(\lambda) + (1-\phi)\overline{T}_\infty(\lambda)\phi + (1-\phi)\overline{T}_\infty(\lambda)(1-\phi).$$

Les deux premiers termes sont des opérateurs de Green singulier d'ordre -2: ils n'opèrent pas sur des espaces compacts, néanmoins ϕ est à support compact, ce qui permet de s'y ramener et donc d'affirmer que ces termes sont à trace. Le troisième terme est la transformée de Laplace de $(1-\phi)\tilde{E}_\infty(t)(1-\phi)$: il est donc à trace pour λ vérifiant $\operatorname{Re}\lambda < -C_2$ d'après l'estimée (2.2) de la proposition 2.5. On en déduit que $\overline{T}_\infty(\lambda)$ est à trace pour tout λ en dehors des spectres de Δ_{S_∞} et $\Delta_{S_\infty - \partial D}$ grâce au lemme suivant:

LEMME 3.4. *Soient A_1, A_2 deux opérateurs auto-adjoins bornés inférieurement et notons, pour λ en dehors des spectres de A_1 et A_2, $T(\lambda) = (A_1-\lambda)^{-1} - (A_2-\lambda)^{-1}$. Si, pour un certain λ_0, $T(\lambda_0)$ est à trace alors $T(\lambda)$ est à trace pour tout λ et T est fonction holomorphe à valeurs dans l'espace des opérateurs à trace.*

Preuve. La première formule de la résolvante

$$(A_i-\lambda)^{-1} = (A_i-\lambda_0)^{-1} + (\lambda-\lambda_0)(A_i-\lambda)^{-1}(A_i-\lambda_0)^{-1}$$

s'écrit aussi $(A_i-\lambda)^{-1} = B_i(\lambda,\lambda_0)(A_i-\lambda_0)^{-1}$ où l'opérateur $B_i(\lambda,\lambda_0) = (1+(\lambda_0-\lambda)(A_i-\lambda_0)^{-1})^{-1}$ est borné, holomorphe en λ. On en déduit l'écriture

$$T(\lambda) = B_1(\lambda,\lambda_0)T(\lambda_0) + B_1(\lambda,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)T(\lambda_0)B_2(\lambda,\lambda_0)(A_2-\lambda_0)^{-1}$$

d'où le lemme résulte immédiatement.

LEMME 3.5. *Soit $\overline{E}_\infty(t) = e^{-t\Delta_{S_\infty}} - e^{-t\Delta_{S_\infty-\partial D}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes C_1', C_2' telles que*

$$\|\overline{E}_\infty(t)\|_{\mathrm{tr}} \leqslant C_1' t^{-1-\varepsilon} e^{C_2' t}, \qquad t > 0.$$

Preuve. On écrit $\overline{E}_\infty(t) = \phi\overline{E}_\infty(t) + (1-\phi)\overline{E}_\infty(t)\phi + (1-\phi)\overline{E}_\infty(t)(1-\phi)$. On a, par la proposition 2.5, $\operatorname{Sup}(\|(1-\phi)\overline{E}_\infty(t)(1-\phi)\| e^{-C_2 t}) < \infty$. Pour estimer les autres termes, il suffit d'estimer la norme trace de $\chi e^{-t\Delta_N}$, où N est une surface (non nécessairement compacte) à bord compact et complète à l'infini, Δ_N le Laplacien-Dirichlet sur N et χ une fonction à support compact K. On écrit, pour cela,

$$\chi e^{-t\Delta_N} = \chi(1+\Delta_N)^{-1-\varepsilon}(1+\Delta_N)^{1+\varepsilon} e^{-t\Delta_N}.$$

Le premier facteur est de classe trace vu que l'injection $H_K^{1+\varepsilon}(N) \hookrightarrow L^2(N)$ l'est, le second a sa norme L^2 majorée par $C' t^{-(1+\varepsilon)}$ $(t > 0)$ en utilisant le théorème spectral.

D'après le lemme précédent, on a

$$\overline{T}_\infty'(\lambda) = \int_0^\infty t e^{t\lambda} \overline{E}_\infty(t)\, dt, \tag{3.5}$$

où l'intégrale est prise dans l'espace des opérateurs à trace si $\operatorname{Re}\lambda < -C_2'$. Par ailleurs, d'après les formules de trace (2.3), (2.9) et les remarques qui les suivent, on a $\operatorname{Tr}\bar{E}_\infty(t) = O(t^{-1/2})$ $(t \to 0^+)$ et donc $\int_0^\infty e^{t\lambda}\operatorname{Tr}\bar{E}_\infty(t)\,dt$ est convergent pour $\operatorname{Re}\lambda < -C_2'$, de dérivée $\operatorname{Tr}\bar{T}_\infty'(\lambda)$ d'après (3.5). Ainsi, pour une constante I_0, on a

$$\operatorname{Tr}\bar{T}_\infty(\lambda) = \int_0^\infty e^{t\lambda}\operatorname{Tr}\bar{E}_\infty(t)\,dt + I_0, \qquad \operatorname{Re}\lambda < -C_2'.$$

On en déduit aisément une formule de trace pour $\bar{T}_\infty(\lambda)$. La proposition suivante donne une formule de trace voisine, qui sera utilisée pour démontrer la partie **B** du théorème 2.

PROPOSITION 3.6. *Soit λ_0 un complexe hors du spectre de Δ_- et T_0 l'opérateur défini par*

$$T_0(\lambda) = \left(\Delta_{S_\infty} - \lambda\right)^{-1} - \left\{(\Delta_- - \lambda_0)^{-1} \oplus \left(\Delta_{S_\infty - D} - \lambda\right)^{-1}\right\}.$$

Notons $\lambda = s(1-s)$. Alors pour λ en dehors du spectre de Δ_{S_∞}, l'opérateur $T_0(\lambda)$ est à trace et on a la formule de trace

(3.6)

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} T_0(s(1-s)) = &-\frac{\operatorname{vol}(D)}{2\pi}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{1}{2(2s-1)}\\ &\times\left\{\sum_{j=1}^{N} 2l_j \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kl_j(s-1)}}{\operatorname{sh}(kl_j)} + \frac{\operatorname{vol}(\partial D)}{2}\right.\\ &\left.+\sum_{\{C\}_0} l(C)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kl(C)(s-1/2)}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)}\right\} + \Lambda_0, \qquad \operatorname{Re}s > 1\end{aligned}$$

où Λ_0 est une constante dépendant de λ_0 et Γ.

Preuve. On a $T_0(\lambda) = \bar{T}_\infty(\lambda) + T_-(\lambda, \lambda_0)$. On en déduit

$$\operatorname{Tr} T_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{t\lambda}\operatorname{Tr}\bar{E}_\infty(t)\,dt + \int_0^\infty (e^{t\lambda} - e^{t\lambda_0})\operatorname{Tr}\{e^{-t\Delta_-}\}\,dt + I_0$$

$$\operatorname{Tr} T_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{t\lambda}\left[\operatorname{Tr}\tilde{E}_\infty(t) - \operatorname{vol}(D)P(t)\right]dt + \operatorname{vol}(D)\int_0^\infty (e^{t\lambda} - e^{t\lambda_0})P(t)\,dt$$

$$-\int_0^\infty e^{t\lambda_0}\left[\operatorname{Tr}\{e^{-t\Delta_-}\} - \operatorname{vol}(D)P(t)\right]dt + I_0, \qquad \operatorname{Re}\lambda < -C_2. \tag{3.7}$$

La formule (3.6) découle alors de (2.9), d'une intégration terme à terme dans (3.7) et d'un prolongement analytique.

4. Démonstration du théorème 2. Rappelons le théorème taubérien, dit d'Ikehara, suivant [9]:

PROPOSITION 4.1. *Soit $d\theta$ une mesure positive, telle que sa transformée de Laplace $L(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, d\theta(y)$ converge sur $\{\operatorname{Re} s > \delta\}$ ($\delta > 0$). Si il existe une constante A non nulle telle que $L(s) - (A/(s-\delta))$ admet un prolongement continu sur $\{\operatorname{Re} s \geqslant \delta\}$, on a l'asymptotique $\theta(y) \sim Ae^{\delta y}/\delta$, $y \to +\infty$.*

Introduisons les mesures $d\theta_+(y) = y\, d\pi_D(y)$, $d\theta_i = y\, d\pi_i(y)$ et $d\theta_0(y) = y\, d\pi_0(y)$ de transformées de Laplace respectives L_+, L_i et L_0.

LEMME 4.2. *Si $\lambda = s(1-s)$, on a*

$$\operatorname{Tr} T_+(\lambda, \lambda_0) = \frac{L_+(s)}{2s-1} + H_+(s) \tag{4.1}$$

$$\operatorname{Tr} T_i(\lambda) = \frac{2L_i(s)}{2s-1} + H_i(s) \tag{4.2}$$

$$\operatorname{Tr} T_0(\lambda) = \frac{L_0(s)}{2s-1} + H_0(s) \tag{4.3}$$

où les fonctions H_+, H_i (resp. H_0) *sont holomorphes sur* $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$ (resp. $\{\operatorname{Re} s > \delta_{S_\infty}\}$).

Preuve. Ce lemme découle des formules de trace (3.2), (3.4), (3.6) et de l'estimation (1.1). Contentons-nous de montrer (4.3). Il est clair que les deux premiers termes du membre de droite de (3.6) sont holomorphes sur $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$. Quant au troisième, nous l'écrirons

$$\sum_{\{C\}_0} l(C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kl(C)(s-1/2)}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)} = 2\sum_{\{C\}_0} l(C) e^{-kl(C)} + 2\sum_{\{C\}_0} l(C) \frac{e^{-l(C)(s+1)}}{1-e^{-l(C)}}$$
$$+ \sum_{\{C\}_0} l(C) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-kl(C)(s-1/2)}}{\operatorname{sh}(kl(C)/2)}$$

où les deux dernières sommes du membre de droite sont holomorphes sur $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$ grâce à l'estimation (1.1).

Une intégration par parties fournit le lemme suivant:

LEMME 4.3. *Si $\pi(x) = \int_1^x d\theta(y)/y$ et $\theta(y) \sim e^{\delta y}$ ($y \to +\infty$) alors $\pi(x) \sim e^{\delta x}/x$, $x \to +\infty$.*

Preuve du théorème 2.

A. Le membre de gauche de (4.1) (resp. (4.2)) a un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1, correspondant à la valeur propre $\lambda_0 = 0$ du laplacien Δ_+ et est holmorphe au voisinage de $\{\operatorname{Re} s \geqslant 1\} - \{1\}$. Ce qui précède permet de déduire immédiatement $\pi_D(x) \sim e^x/x$ (resp. $\pi_i(x) \sim e^x/2x$) et donc la partie **A**.

B. Si δ_{S_∞} est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, le bas du spectre de Δ_{S_∞} correspond à la valeur propre simple $\delta_{S_\infty}(1 - \delta_{S_\infty})$ (Proposition 1.4): ainsi le membre de gauche de (4.3) est holomorphe sur $\{\operatorname{Re} s > \delta_{S_\infty}\}$ avec un pôle simple en $s = \delta_{S_\infty}$ de résidu 1. La partie **B** en résulte.

5. Remarques et compléments

5.1. *Fonction zêta de Selberg.* Pour préciser les asymptotiques du théorème 2 A, il est utile d'introduire les fonctions zêta de Selberg suivantes:

$$\zeta_\pm(s) = \prod_{j=1}^{N} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - e^{-(s+1/2 \mp 1/2 + 2n) l_j}\right)^4 \prod_{\{C\}_p} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - e^{-(s+n) l(C)}\right)^2$$

$$\times \prod_{\{C\}_i} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - e^{-(s+n) 2 l(C)}\right) \left(\frac{1 - e^{-(s+n) l(C)}}{1 + e^{-(s+n) l(C)}} \right)^{\pm(-1)^n}$$

$$\zeta_D(s) = \prod_{j=1}^{N} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - e^{-l_j (s+n)}\right)^{2(-1)^n} \prod_{\{C\}_i} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(s+n) l(C)}}{1 + e^{-(s+n) l(C)}} \right)^{(-1)^n}$$

Ces produits sont convergents sur $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ d'après l'estimation asymptotique (1.1) et les formules de trace (3.2), (3.4) permettent de préciser leurs propriétés rassemblées dans la proposition suivante ([8] 1, p. 66–73):

PROPOSITION 5.1.

(i) *Les fonctions* $\zeta_+, \zeta_-, \zeta_D$ *admettent un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$.

(ii) $\zeta_D^2 = \zeta_+/\zeta_-$.

(iii)
$$\begin{aligned}\zeta'_\pm/\zeta_\pm(s) = {} & 2(2s-1)\operatorname{Tr}\{T_\pm(s(1-s), s_0(1-s_0))\} \\ & + (2s-1)/(2s_0-1)\zeta'_\pm/\zeta_\pm(s_0) \\ & + 2(2s-1)\operatorname{vol}(D)/2\pi\{\Gamma'/\Gamma(s) - \Gamma'/\Gamma(s_0)\} \mp \operatorname{vol}(\partial D)/2\end{aligned}$$

$$\zeta'_D/\zeta_D(s) = (2s-1)\operatorname{Tr}\{T_i(s(1-s))\} - \operatorname{vol}(\partial D)/2.$$

(iv) *Soit* $(\lambda_n^\pm, m_n^\pm)$ *la suite des valeurs spectrales avec multiplicité de* $\Delta_\pm$ *et notons* $\lambda_n^\pm = \frac{1}{4} - (r_n^\pm)^2$ *(avec* $\operatorname{Re} r_n^\pm \geqslant \frac{1}{2}$ *et* $\operatorname{Im} r_n^\pm \geqslant 0$*).* $\zeta_\pm$ *a comme zéros, en sus des zéros triviaux* $\{-k, k \in \mathbf{N}\}$ *(de multiplicité* $2(2k+1)\operatorname{vol}(D)/2\pi$*), les* $\frac{1}{2} \pm r_n^\pm$ *avec multiplicité* $2m_n^\pm$.

(v) *On a les équations fonctionnelles*

$$\zeta_\pm(s) = \zeta_\pm(1-s) e^{2\operatorname{vol}(D)\int_0^{s-1/2} v \operatorname{tg}(\pi v)\, dv \mp \operatorname{vol}(\partial D)(s-1/2)}$$

$$\zeta_D(s) = \zeta_D(1-s) e^{-\operatorname{vol}(\partial D)(s-1/2)}.$$

COROLLAIRE 5.2. *Soit $M_{\pm}$ l'entier tel que $r_k^{\pm} > \frac{3}{4}$ exactement pour $k \in [0, M_{\pm}]$ et notons $l_i(x)$ l'intégrale logarithmique $l_i(x) = \int_0^x dt/\log t$. On a alors*

(5.1)

$$\pi_D(\log x) = l_i(x) + \sum_{k=2}^{M_+} m_k^+ l_i(x^{r_k^+}) + O\big(x^{3/4}(\log x)^{-1/2}\big)$$

$$2\pi_i(\log x) = l_i(x) + \sum_{k=2}^{M_+} m_k^+ l_i(x^{r_k^+}) - \sum_{k=1}^{M_-} m_k^- l_i(x^{r_k^-}) + O\big(x^{3/4}/(\log x)^{-1/2}\big).$$

La démonstration du corollaire est mutatis mutandis celle de ([8] 1, p. 95–119) pour le théorème des nombres premiers sur une variété compacte sans bord: on utilisera ici les fonctions zêta ζ_+ et ζ_D.

L'existence de petites valeurs propres est liée à celle de petites géodésiques périodiques et les résultats de Colbois [3] permettent d'exhiber des surfaces D avec des entrelacements différents pour leurs petites valeurs propres ($\lambda_k^{\pm}$, $k \leqslant \mathrm{vol}(D)/2\pi$): on en tiendra compte pour ordonner le membre de droite de (5.1) suivant l'ordre de décroissance asymptotique à l'infini.

5.2. $\delta_{S_\infty} \leqslant \frac{1}{2}$. La formule de trace (3.4) a été établie sans restriction sur l'exposant de Poincaré δ_{S_∞}. Dans son membre de droite, le premier terme est méromorphe sur $\mathbf{C}$ (avec des pôles simples en $0, -1, -2, \ldots$) ainsi que la première somme (avec des pôles simples en $-n + 2i\pi k/l_j$, $n \geqslant 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $j = 1 \cdots N$). On a toujours $\nu_{S_\infty}(x) = O(e^{\delta_{S_\infty} x})$ ([17]), ainsi la somme sur les géodésiques simples de (3.4) est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, s > \delta_{S_\infty}\}$. Dans le cas où $\Delta_{S_\infty} < \frac{1}{2}$, on a donc un prolongement méromorphe (avec un pôle en $s = \frac{1}{2}$) de $\mathrm{Tr}\, T_0(s(1-s))$ sur $\{\mathrm{Re}\, s > \delta_{S_\infty}\}$, au-delà de la droite $\{\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\}$ correspondant au spectre (purement absolument continu) de Δ_{S_∞}. Obtenir un asymptotique précis de ν_{S_∞} passe par la connaissance des résonances de Δ_{S_∞} (pôles du prolongement de la résolvante sur le feuillet non physique $\{\mathrm{Re}\, s < \frac{1}{2}\}$ à travers $\{\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\}$). Il en est de même pour préciser le reste dans l'évaluation asymptotique du théorème 1.

5.3. *D'autres fonctions de comptage.* On peut considérer d'autres fonctions de comptage. Soit σ un cycle (indexé par $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$) de $2n$ entiers pris entre 1 et N, dont deux quelconques d'indices successifs sont dsitincts, D_σ la surface obtenue à partir de $2n$ exemplaires (D_i) de D en recollant D_i à D_{i+1} suivant la composante $C_{\sigma(i)}$ de leurs bords, G_σ l'ensemble des géodésiques fermées simples de D qui se relèvent à D_σ en une géodésique fermée (D_σ n'est pas un revêtement à proprement parler de D. Néanmoins si, SD désignant le fibré en sphères déduit du fibré tangent TD, on note $S_bD = SD - S(T\partial D)/\sim$ où $(x, \xi) \sim (x, \xi')$ si $\xi - \xi'$ est normal à ∂D et $S_{\sigma,b}D = S_b(D_\sigma) - [\cup C_{\sigma(i)} \times \{\xi/\xi$ tangent à $C_{\sigma(i)}\}]$, alors $S_{\sigma,b}D$ est un revêtement d'ordre $2n$ de S_bD. Les géodésiques fermées de D, mises à part celles du bord, s'interprètent comme des courbes lisses géodésiques dans $S_b D$). Une géodésique de D, distincte d'une géodésique du bord de D, appartient à G_σ si et seulement si le cycle $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ de ses réflexions successives sur ∂D vérifie la propriété suivante: pour tout i, si $r_i = \sigma(j)$ alors r_{i+1} vaut $\sigma(j-1)$, $\sigma(j)$ ou $\sigma(j+1)$. Soit π_σ la fonction de comptage associée à G_σ. On a

$$(5.2) \qquad \pi_{0, D_\sigma}/2n \leqslant \pi_\sigma \leqslant \pi_{0, D_\sigma}, \qquad 2n\pi_{0, D} \leqslant \pi_{0, D_\sigma}.$$

Reprenons le polygone P_∞ introduit en 1.1: $P_\infty = P \cup \bigcup_{j=1}^N \mathscr{C}_j$ où $\mathscr{C}_j$ est isométrique à la demi bande hyperbolique $\mathscr{C}(l_j)$ (1.3). Notons $\mathscr{L}_j = \mathscr{L}(P, \beta_j)$ la lentille ([13]) contenant $\mathscr{C}_j$: c'est le demi-espace hyperbolique contenant $\mathscr{L}_j$, dont la frontière supporte β_j. Les lentilles $\mathscr{L}_j$ sont deux à deux disjointes. Soit $\phi = (\phi(j))$ une suite d'entiers pris entre 1 et N, dont deux d'indices successifs sont disjoints. Il lui est associé la suite de polygone P_ϕ définie inductivement de la manière suivante: $P_{\phi(1)} = P$ et $P_{\phi(k+1)}$ est le symétrique de $P_{\phi(k)} = \theta_k \cdot P$ $(\theta_k \in \Gamma)$ par rapport au côté $\theta_k \cdot \beta_{\phi(k)}$. Si $\tilde{P}_{\phi(k)} = \bigcup_{i \leqslant k} P_{\phi(k)}$, alors il est clair que $\tilde{P}_{\phi(k)}$ est convexe et que les lentilles s'appuyant sur les côtés de $\tilde{P}_{\phi(k)}$ congrus par Γ à un élément de $\{\beta_j\}$ sont deux à deux disjointes (il suffit de remarquer que $\mathscr{L}(\tilde{P}_{\phi(k)}, \theta_k \cdot \beta_{\phi(k)})$ est disjointe des autres lentilles s'appuyant sur $\tilde{P}_{\phi(k)}$ et contient $P_{\phi(k+1)}$ ainsi que toutes les lentilles s'appuyant sur $P_{\phi(k+1)}$, exceptée $\mathscr{L}(P_{\phi(k+1)}, \theta_k \cdot \beta_{\phi(k)})$).

Pour le cycle σ, on notera P_σ le polygone associé à la suite $(\sigma(1), \ldots, \sigma(2n))$. Identifiant les côtés $\theta_k \cdot \alpha_i$ avec $\theta_k \cdot \alpha_i'$, $\beta_{\sigma(2n)}$ avec $\theta_{2n} \cdot \beta_{\sigma(2n)}$, on obtient la surface D_σ. D'autre part, appliquant le théorème de Maskit, on montre que P_σ est le polygone fondamental pour l'action du groupe discret Γ_σ engendré par $\{\theta_k \gamma_i \theta_k^{-1}, \theta_{2n}, \theta_k \sigma_j \theta_k^{-1}\ (j \neq \sigma(k))\}$. La surface $(S_\sigma)_\infty$ non compacte construite à partir de D_σ est le quotient de H par le groupe discret $(\Gamma_\sigma)_\infty$ engendré par $\{\theta_k \gamma_i \theta_k^{-1}, \theta_{2n}\}$. Ainsi $(\Gamma_\sigma)_\infty \supset \Gamma_\infty$ et donc $(\delta_{S_\sigma})_\infty \geqslant \delta_{S_\infty}$.

Si $\delta_{S_\infty} > \frac{1}{2}$, d'après (5.2) et le théorème 2 **B**, on a donc $\delta_{(S_\sigma)_\infty} > \delta_{S_\infty}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, Acta Math. **126** (1971), 11–51.
2. S. Cheng, P. Li and S. Yau, *On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold*, Amer. J. Math. **103** (1981), 1021–1063.
3. B. Colbois, *Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphe, (Prépublication)*.
4. Y. Colin de Verdiere, *Théorie spectrale des surfaces de Riemann d'aire infinie*, Astérisque **132** (1985), 259–277.
5. H. Donnelly, *Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions*, Illinois J. Math. **23** (1979), 485–496.
6. R. Gangolli, *The length spectrum of some compact manifolds of negative curvature*, J. Differential Geometry **12** (1977), 403–424.
7. G. Grubb, *Singular Green operators and trace class estimates for exterior boundary problems*, Duke Math. J. **51** (1984), 447–528.

8. D. HEIJHAL, *The Selberg trace formula for* PSL(2, R), Vol. 1 et Vol. 2. Lecture notes in Math., 548 (1976) et 1001 (1983), Springer.
9. S. LANG, *Algebraic numbers*, Addison-Wesley, 1964.
10. G. A. MARGULIS, *Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature*, Functional Anal. Appl. **3** (1969), 335–336.
11. B. MASKIT, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Advances in Math. **7** (1971), 219–230.
12. H. P. MCKEAN, *Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 225–246.
13. S. J. PATTERSON, *The limit set of a fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), 241–273.
14. A. SELBERG, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.
15. B. SIMON, *Trace ideals and their applications*, Cambridge, 1979.
16. ______, *Classical boundary conditions as a technical tool in modern mathematical physics*, Advances in Math. **30** (1978), 268–281.
17. D. SULLIVAN, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. Math. I.H.E.S. **50** (1979), 419–450.
18. A. B. VENKOFF, *Spectral theory of automorphic functions*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **4** (1982), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

INSTITUT FOURIER, B.P. 74, 38402 SAINT-MARTIN-D'HERES CEDEX, FRANCE