

# JEAN LERAY, mathématicien du XXe siècle

Laurent Guillopé

Laboratoire de mathématiques de Nantes



Université permanente de Nantes

17 novembre 2006



Congrès international de mathématiques, Nice, 1970, avec S. Sobolev et H. Cartan

- 7 novembre 1906 Naissance à Chantenay (Loire Inférieure)
- 1932 Mariage avec Marguerite Trumier
- 1933 Naissance de Jean-Claude
- 1947 Naissance de Françoise
- 1949 Naissance de Denis
- 10 novembre 1998 Décès à La Baule (Loire Atlantique)

*Je suis né le 7 novembre 1906, l'année où Dreyfus fut réhabilité par la Cour de cassation. Le ministère Combes dura de 1902 à 1905. Lors de ma naissance, il venait de voter la loi de séparation de l'Église et de l'État. Les influences de Victor Hugo, mort 20 ans plus tôt, d'Auguste Comte et de Darwin morts 50 ans plus tôt, étaient à leur apogée.*

*Je suis né le 7 novembre 1906, l'année où Dreyfus fut réhabilité par la Cour de cassation. Le ministère Combes dura de 1902 à 1905. Lors de ma naissance, il venait de voter la loi de séparation de l'Église et de l'État. Les influences de Victor Hugo, mort 20 ans plus tôt, d'Auguste Comte et de Darwin morts 50 ans plus tôt, étaient à leur apogée.*



- 1911 – 1924 Études primaires et secondaires, Nantes
- 1924 – 1926 Lycée Chateaubriand, Rennes
- 1926 – 1929 École normale supérieure, Paris
- 1933 Docteur ès sciences
- 1933 Chargé de recherches
- 1944 Correspondant de l'Académie des sciences de Paris (mathématiques pures)
- 1938 – 1939 Professeur à l'Université de Nancy (chaire de mathématiques appliquées)
- 1940 – 1945 Recteur de l'Université de captivité de l'Oflag XVIIA, Edelbach
- 1941 Maître de conférences à l'Université de Paris (mécanique des fluides)
- 1943 – 1947 Professeur à l'Université de Paris (sans chaire)
- 1947 – 1978 Professeur au Collège de France  
Chaire *Théorie des équations différentielles et fonctionnelles*
- 1951 – 1961 Professeur à temps partiel à l'Institute of Advanced Studies, Princeton
- 1953 Membre de l'Académie des sciences de Paris (mécanique)
- 1946 – 1972 Rédacteur en chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées*

- 1938 Prix Malaxa (Roumanie) [avec J. SCHAUDER]
- 1934-1949 Prix de l'Institut : H. de Parville (1934), Francœur (1937), Grand prix des sciences mathématiques (1940), Montyon (1942), Petit d'Ormoy (1949)
- 1971 Prix Feltrinelli (Accademia dei Lincei)
- 1979 Prix Wolf (Israël) [avec A. WEIL]
- 1985 Médaille Lomonosov (Académie des sciences, URSS) [avec S. SOBOLEV]

- 1938 Prix Malaxa (Roumanie) [avec J. SCHAUDER]
- 1934-1949 Prix de l'Institut : H. de Parville (1934), Francœur (1937), Grand prix des sciences mathématiques (1940), Montyon (1942), Petit d'Ormoy (1949)
- 1971 Prix Feltrinelli (Accademia dei Lincei)
- 1979 Prix Wolf (Israël) [avec A. WEIL]
- 1985 Médaille Lomonosov (Académie des sciences, URSS) [avec S. SOBOLEV]

1951

Accademia delle Science di Torino

1959

1959

1960

1962

1963

1965

1966

1967

1974

1975

1877

1980

1983



*La caractéristique essentielle de mes publications est cependant leur diversité : les problèmes qui m'attirèrent exigèrent des procédés encore inusités dans la spécialité où ils étaient catalogués ; leurs solutions nécessitèrent ou suggérèrent des perfectionnements de ces procédés tels que pour les développer je dus changer de spécialité.[..] ce fut mon intérêt pour la Mécanique qui m'obligea à donner des développements inattendus à l'Analyse et à la Topologie algébrique. Notice sur les travaux scientifiques (1953)*

*La caractéristique essentielle de mes publications est cependant leur diversité : les problèmes qui m'attirèrent exigèrent des procédés encore inusités dans la spécialité où ils étaient catalogués ; leurs solutions nécessitèrent ou suggérèrent des perfectionnements de ces procédés tels que pour les développer je dus changer de spécialité.[..] ce fut mon intérêt pour la Mécanique qui m'obligea à donner des développements inattendus à l'Analyse et à la Topologie algébrique. Notice sur les travaux scientifiques (1953)*

1. Schauder (1933)
2. Navier (1934)
3. L'Oflag
4. Topologie (194x)



H. Lewy   J. Schauder   J. Leray  
Paris (1933)



H. Lewy J. Schauder J. Leray  
Paris (1933)

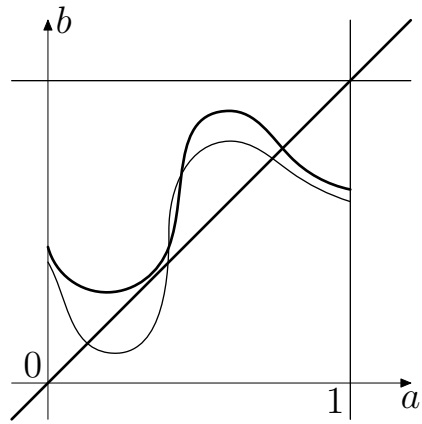
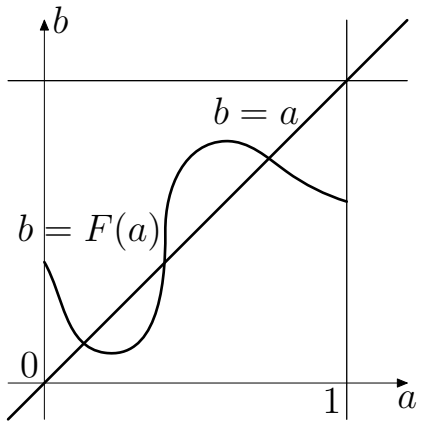
L'équation  $f(a) = 0$  est équivalente à l'équation  $a - f(a) = a$ .



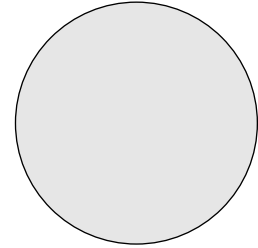
H. Lewy J. Schauder J. Leray  
Paris (1933)

L'équation  $f(a) = 0$  est équivalente à l'équation  $a - f(a) = a$ .

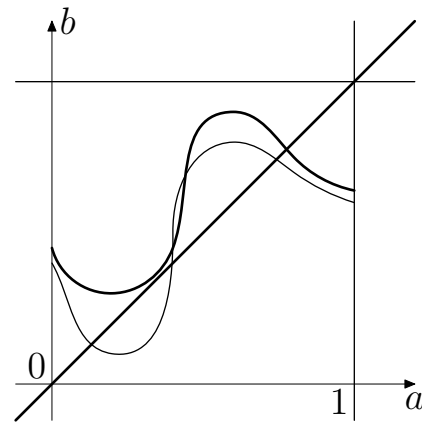
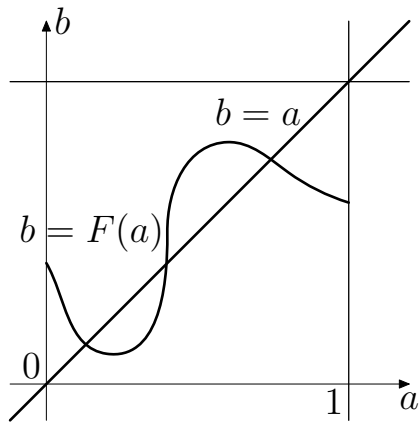
Si  $F$  est définie par  $F(a) = a - f(a)$ , l'équation  $F(a) = a$  signifie la recherche des points fixes de  $F$ .



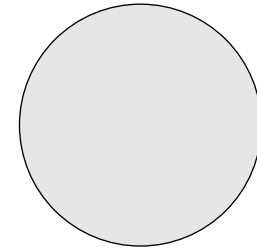
$[ \text{-----} ]$   
 Disque  $D = [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$



Disque  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$

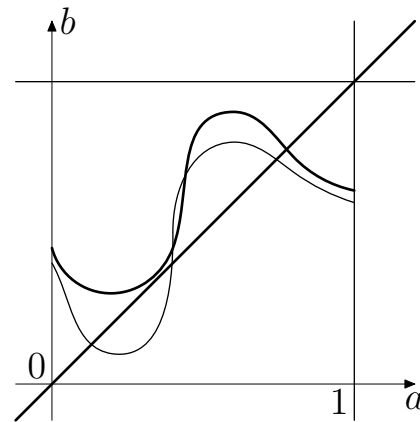
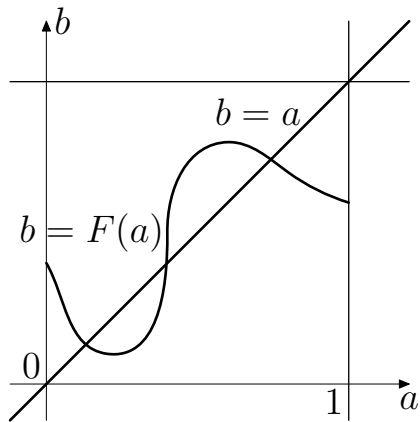


Disque  $D = [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$

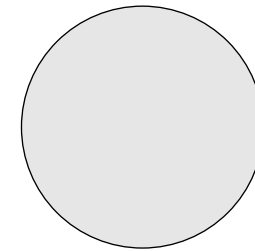


Disque  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$

Si  $F : D \rightarrow D$  avec  $D$  disque dans  $\mathbb{R}^n$  est continue, alors l'application  $F$  a un point fixe dans  $D$  (L. BROWER, 1912).



Disque  $D = [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$



Disque  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$

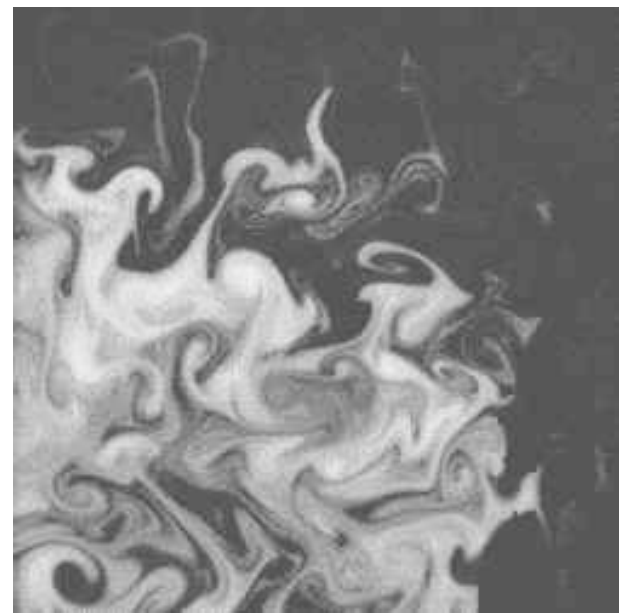
Si  $F : D \rightarrow D$  avec  $D$  disque dans  $\mathbb{R}^n$  est continue, alors l'application  $F$  a un point fixe dans  $D$  (L. BROWER, 1912).

LERAY et SCHAUDER généralisent le théorème de Brower à des domaines  $D$  dans des espaces de fonctions et résolvent ainsi des équations aux dérivées partielles non linéaires :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i,j} (x, a(x), \nabla a(x)) \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} (x) = B (x, a(x), \nabla a(x)), \quad x \in \Omega$$

si  $a$  est une fonction  $a : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow a(x) \in \mathbb{R}$ .





L'équation de Navier-Stokes porte sur l'évolution temporelle d'un champ de vitesse  $\vec{v}$  dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ ,

$$\vec{v} : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \vec{v}(t, x) \in \mathbb{R}^d, (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

et d'un champ de pression  $p : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow p(t, x) \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

L'équation de Navier-Stokes porte sur l'évolution temporelle d'un champ de vitesse  $\vec{v}$  dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ ,

$$\vec{v} : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \vec{v}(t, x) \in \mathbb{R}^d, (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

et d'un champ de pression  $p : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow p(t, x) \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

En 1934, LERAY montre l'existence de solutions *turbulentes*, régulières en tout temps, sauf éventuellement le long d'un ensemble *petit* où la solution est définie en un sens faible, définition anticipant la théorie des distributions de LAURENT SCHWARTZ (1945) et retrouvée plus tard chez SERGEI SOBOLEV (1938). C'est un *tour de force*.

*J'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité* (1933)

*Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'un état initial donné corresponde une solution turbulente unique* (1933)

*J'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité* (1933)

*Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'un état initial donné corresponde une solution turbulente unique* (1933)

*Mes premières études concernèrent les théorèmes d'existence de la Mécanique des fluides, sujet qui maintenant attire plus l'attention qu'il ne le faisait alors : les machines à calculer actuelles peuvent effectuer les séries de calcul qui établirent jadis un théorème d'existence, mais elles sont incapables de découvrir la solution d'un problème qu'on ne sait approcher, dont on ignore s'il a ou non une solution unique.* (1953)

« Jean Leray fait les mathématiques d'après-demain avec le style d'hier. »

*G. Choquet*

« Le premier analyste moderne »

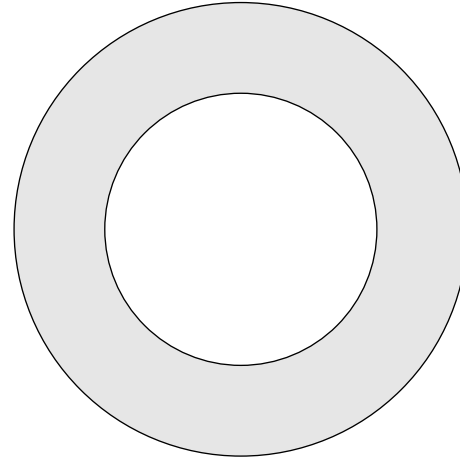
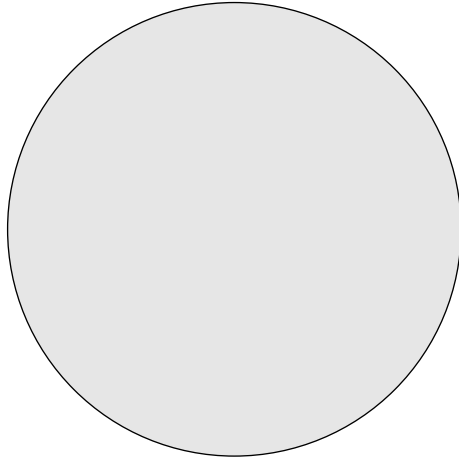
*I. Ekeland*

« Que Leray resta fidèle à la nature eut un impact profond sur les mathématiques françaises d'après-guerre. En effet, ce fut ses contributions, son prestige et son influence qui leur assurèrent la juste place pour leur reconnaissance. Il fut le guide intellectuel de la remarquable école française contemporaine de mathématiques appliquées. Plus que tout, il assura l'équilibre entre le concret et l'abstraction, équilibre si essentiel à la bonne santé des mathématiques. »

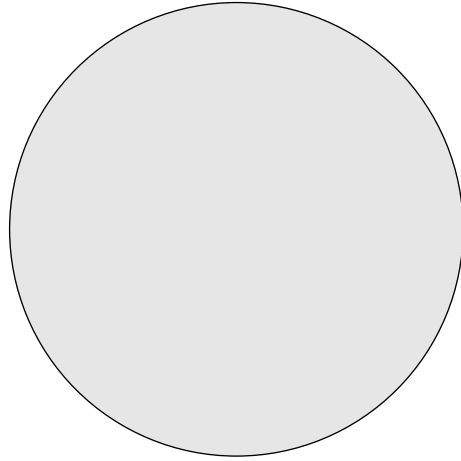
*P. Lax (1997)*

La résolution de Navier-Stokes est l'un des sept problèmes du millénaire de la fondation Clay (2001). Elle reste ouverte, au contraire de la conjecture de Poincaré.

La conjecture de Poincaré est du domaine de la topologie

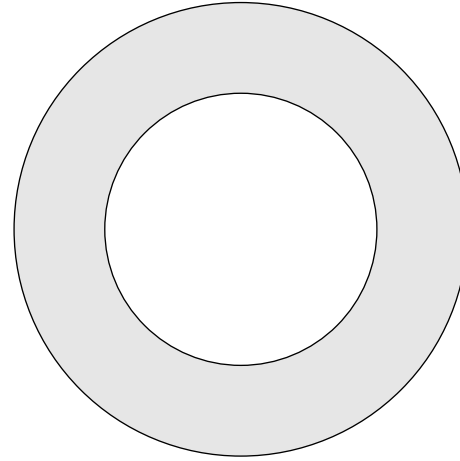


# La conjecture de Poincaré est du domaine de la topologie



$\pi_1(X)$

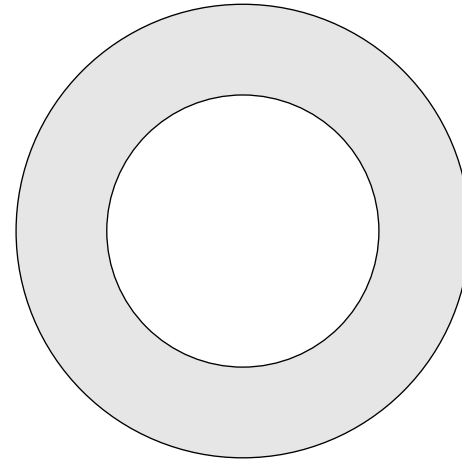
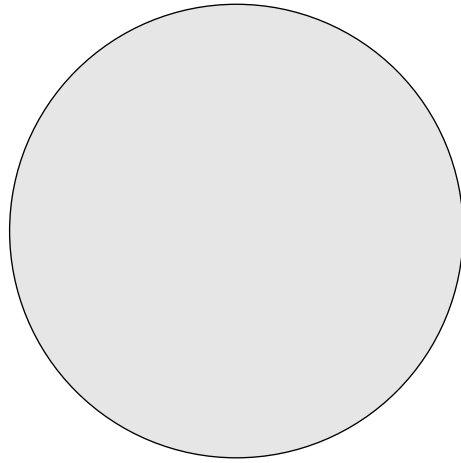
$\{0\}$



$\mathbb{Z}^d$



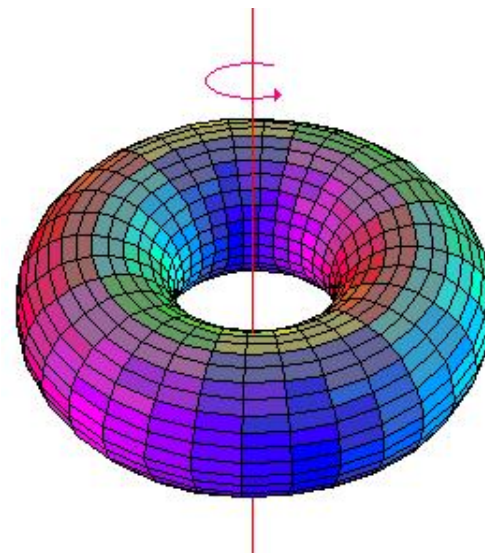
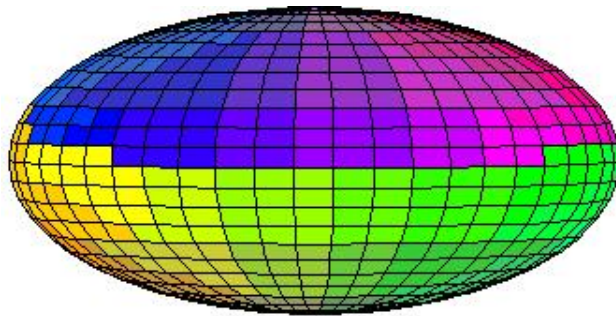
# La conjecture de Poincaré est du domaine de la topologie



$\pi_1(X)$

$\{0\}$

$\mathbb{Z}^d$



Conjecture de Poincaré : Un espace  $X$  de dimension 3 avec groupe de Poincaré  $\pi_1(X)$  trivial est la sphère de dimension 3.

Conjecture de Poincaré : Un espace  $X$  de dimension 3 avec groupe de Poincaré  $\pi_1(X)$  trivial est la sphère de dimension 3.

La conjecture est résolue en 2003 par G. PERELMAN, empruntant le chemin initié par R. HAMILTON, qui commença l'étude du flot de Ricci

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2 \operatorname{Ricci}(g(t)).$$

Le chef d'œuvre de G. PERLEMAN est de nature géométrique, avec des outils puissants d'analyse.

Conjecture de Poincaré : Un espace  $X$  de dimension 3 avec groupe de Poincaré  $\pi_1(X)$  trivial est la sphère de dimension 3.

La conjecture est résolue en 2003 par G. PERELMAN, empruntant le chemin initié par R. HAMILTON, qui commença l'étude du flot de Ricci

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2 \text{Ricci}(g(t)).$$

Le chef d'œuvre de G. PERLEMAN est de nature géométrique, avec des outils puissants d'analyse.

La courbure Ricci ( $G$ ) apparaît dans l'équation de la relativité générale d'Einstein qui, dans le vide et sans constante cosmologique, prend la forme

$$\text{Ricci}(G) = \frac{\rho}{2}G$$

## L'Oflag et son université

*[. . .] le 2 juillet 1940, soumis à une famine débilante, privés de tout colis; de tout livre et de toute distraction, nous avons immédiatement fondé l'université de l'Oflag XVII A; au début de l'hiver notre situation s'améliorant et la vie du camp s'organisant l'université entreprit la préparation de la licence et aux grand concours; les 500 diplômes qu'elle a décernés en cinq ans sont actuellement validés; ses élèves ont remporté les plus brillants succès à l'agrégation de droit et aux diverses agrégations de l'enseignement secondaire, quelques uns de ses professeurs ont pu faire des recherches personnelles, d'autres des ouvrages de vulgarisation ou des livres scolaires.*

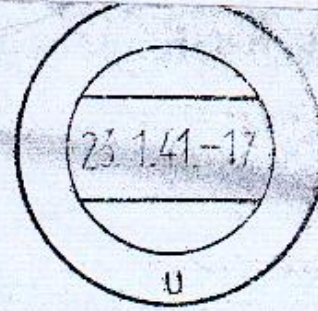
*Notre Université s'honore d'avoir respecté et fait respecter les valeurs intellectuelles et morales qu'une propagande active prétendait déconsidérer, d'avoir été l'objet des nombreuses brimades allemandes, d'avoir osé cependant organiser des conférences publiques mettant nos camarades en garde contre l'offre tentante mais très dangereuse de renoncer à la qualité d'officier prisonnier pour partir travailler au profit de l'économie allemande, d'être restée indépendante des organismes politiques organisés par l'ennemi, d'avoir fait enseigner nos collègues israélites en dépit des mesures racistes. La direction de cette Université m'a incombé. Je fus libéré par les Alliés le 10 mai 1945.*

Kriegsgefangenenpost **FLAG**  
Correspondance des prisonniers de guerre

Postkarte

Carte postale

**403**  
**GEPRÜFT**



An  
A

Professor Levy

**Gebührenfrei! Franc de port!**

**Absender:**  
Envoi de

Vor- und Zuname:  
Nom et prénom

LERAY Jean

Gefangenenummer:  
No. du prisonnier

11.526

Lager-Bezeichnung:  
Nom du camp

Offag XVII A

Deutschland (Allemagne)

Empfangsort:  
Lieu de destination

Berkeley

Straße:  
Rue

University

Land:  
Landesteil (Provinz) usw.)  
Dép.

California U.S.A.

in part must be obtained in writing from the original author. Please return all copies to the original author upon completion of your research. Permission to reproduce may not be granted without the express permission of the original author. Copyright © 2006 by The Bancroft Library, University of California, Berkeley.

## Kriegsgefangenenlager

Camp des prisonniers

Datum: 19 janvier 1941  
date

Mon cher Ami, Ayant, dans cette nouvelle situation, assez de confort pour poursuivre  
mes recherches scientifiques, recevant quelques colis de livres de collègues dévoués habitant la  
France non occupée, je vous demande de bien vouloir m'envoyer et me faire envoyer  
(en particulier de Princeton) des tirages à part concernant: équations aux dérivées  
partielles, Topologie, groupes et quantas; quelques autres mathématiciens de ce  
camp (Rosen, Kille, etc.) en profiteront avec moi. Nous avons créé ici une véritable  
Université et en travaillant intensément que nous attendons vos divers envois. Très cordialement,

J. Leray

Copyright from originals in The Bancroft Library. Copies may not be deposited in other libraries without the express permission. Please return to the Bancroft Library, University of California, Berkeley, CA 94720-5080. In print must be obtained in writing.



*Dans les circonstances où je me trouve, il ne m'a pas été possible de vérifier dans la littérature l'originalité de ce résultat. . .*

*Note C. R. A. S. (1942)*

*Dans les circonstances où je me trouve, il ne m'a pas été possible de vérifier dans la littérature l'originalité de ce résultat. . .*

*Note C. R. A. S. (1942)*

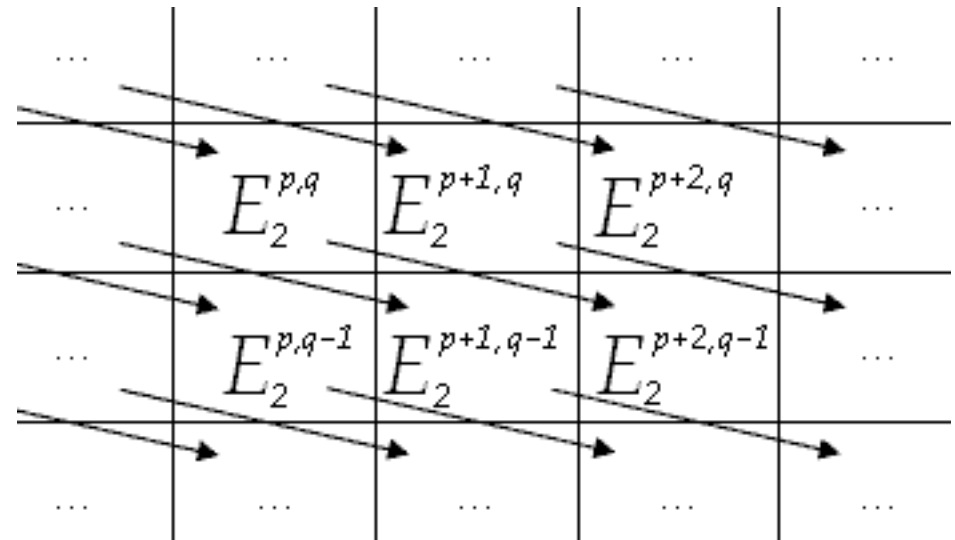
« L'exposé rédigé par M. J. Leray est [appelé] à faire quelque bruit dans le monde mathématique. [. . .] Ajoutons que M. J. Leray, professeur à la Sorbonne, a écrit le présent travail en captivité (il est encore prisonnier, détenu à l'Oflag XVII). Le travail actuel a reçu de M. Hopf, professeur à l'Université de Zurich (savant d'une compétence notoire sur le sujet) une adhésion enthousiaste » *H. Villat (JMPA, 11 janvier 1944)*

$$U \subset V \subset X$$

$$r_{U,V} : \Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(X, \mathcal{F}))$$

Faisceaux



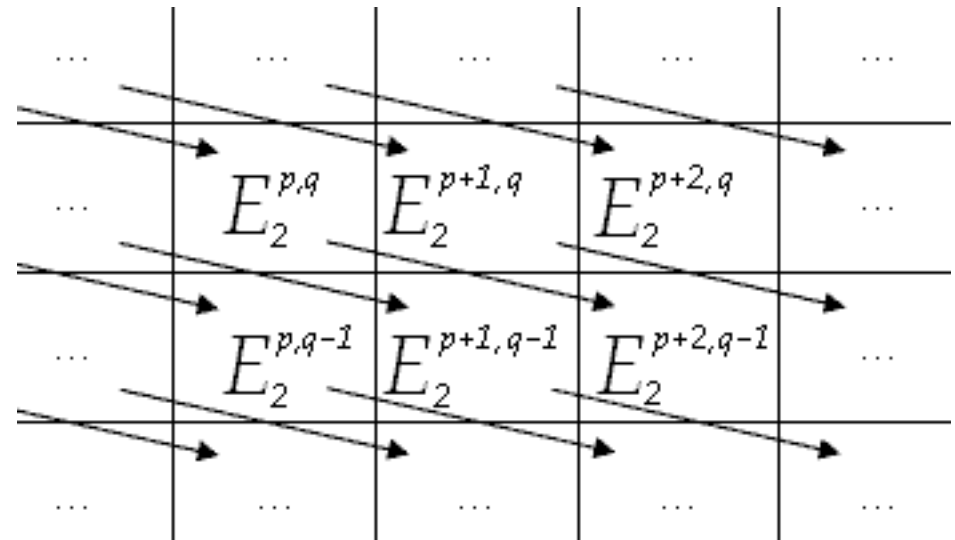
Suites spectrales

$$U \subset V \subset X$$

$$r_{U,V} : \Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

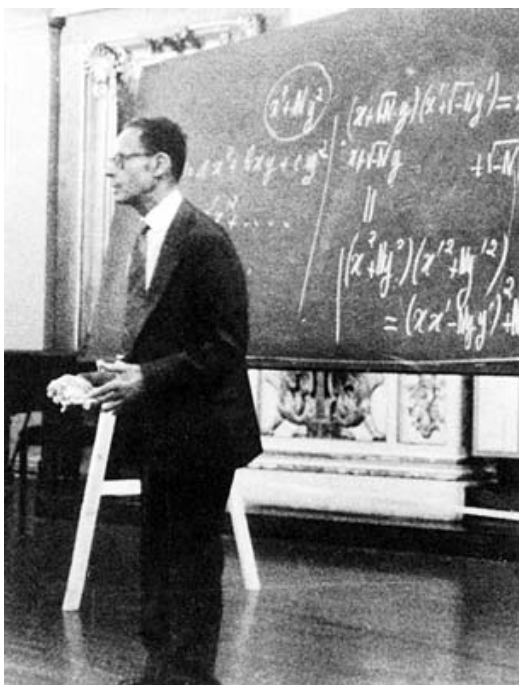
$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(X, \mathcal{F}))$$

Faisceaux



Suites spectrales

*La révolution française des années 1950*



A. WEIL  
1906 – 1998

Cohomologie de De Rahm

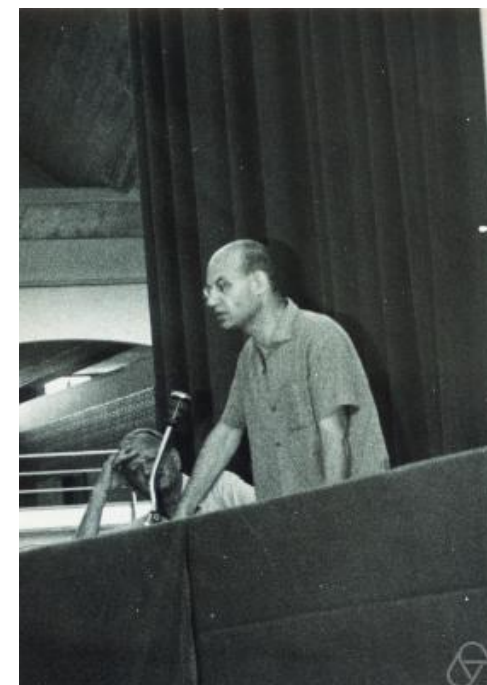
Topologie algébrique



H. CARTAN      J.-P. SERRE  
1904 –                      1926 –

Analyse complexe

Géométrie algébrique



A. GROTHENDIECK  
1928 –

*L'homme et l'œuvre éblouirent les contemporains. Après un siècle de travaux mathématiques, nous pouvons les comprendre avec plus d'aisance, parler plus familièrement d'eux ; mais plus nous les approchons, plus nous les admirons et les respectons.*

*POINCARÉ (Henri) (1854-1912), dans Encyclopédie Universalis (1975)*

*Si mon activité fut essentiellement théorique, ce fut, sans doute, à cause des hasards de la vie et en particulier de ma captivité : il me semble qu'on doive attribuer une importance égale aux problèmes techniques, dont sont nées les Mathématiques et aux constructions théoriques, qui sont leur aboutissement.*

*Notice sur les travaux scientifiques (1953)*

*Quelle est la cause de l'essor des maths ?*



*Quelle est la cause de l'essor des maths ?*

*Cet essor est un phénomène qu'on observe. Il n'est possible que grâce à deux circonstances*

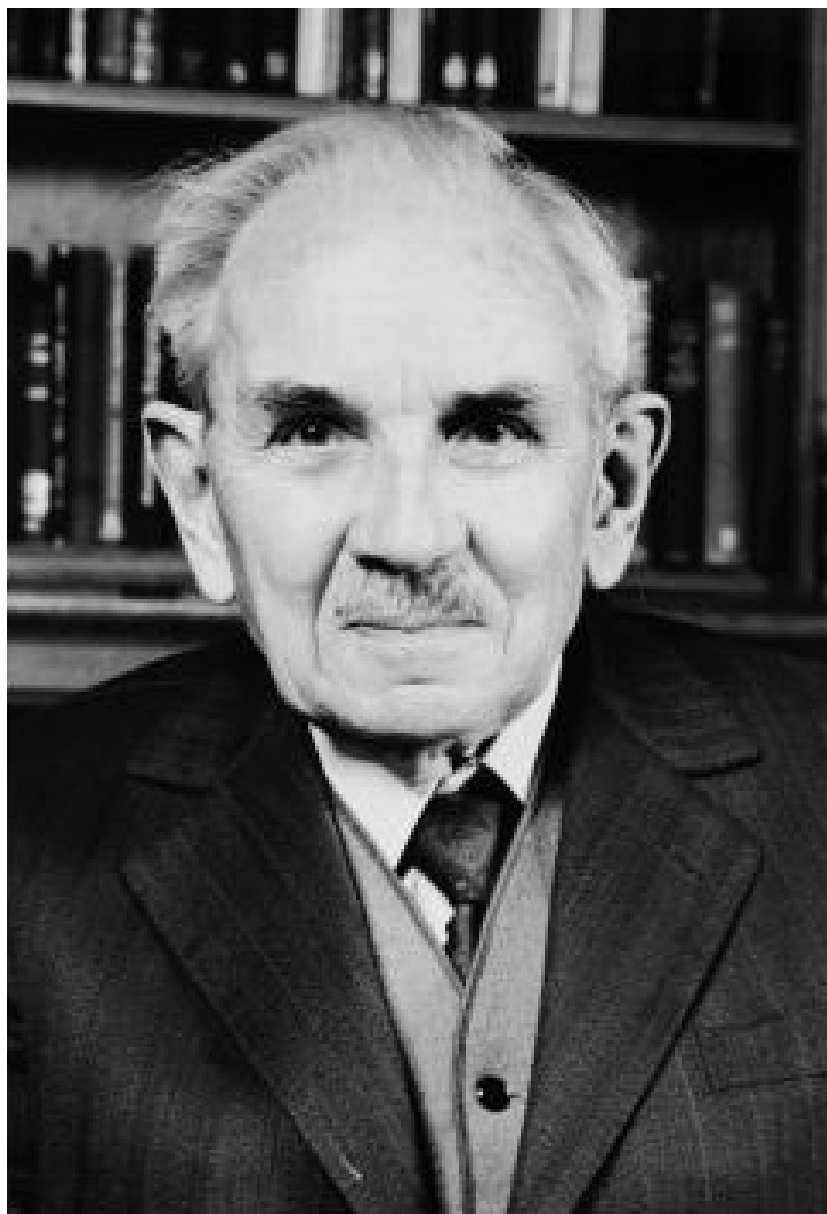
- Le vif intérêt pour certains jeunes portent aux mathématiques, leur désir de mieux les connaître, leur passion d'explorer l'univers abstrait, l'univers logique et aussi, éventuellement, ses étonnantes relations avec le monde réel.*
- Les besoins d'employer les mathématiques à l'analyse des phénomènes naturels.*

*Quelle est la cause de l'essor des maths ?*

*Cet essor est un phénomène qu'on observe. Il n'est possible que grâce à deux circonstances*

- Le vif intérêt pour certains jeunes portent aux mathématiques, leur désir de mieux les connaître, leur passion d'explorer l'univers abstrait, l'univers logique et aussi, éventuellement, ses étonnantes relations avec le monde réel.*
- Les besoins d'employer les mathématiques à l'analyse des phénomènes naturels.*

*Or nul ne peut comprendre les mathématiques s'il n'en a créées. L'arrêt de la recherche mathématique serait la fin de l'emploi des mathématiques, l'atrophie mortelle de la science.*



7 nov. 1906 — 10 nov. 1998