THESE DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE

DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE

ET MEDICALE DE GRENOBLE

par

Laurent GUILLOPE

Préparée

dans le laboratoire de Mathématiques pures,

associé au C.N.R.S.

Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$.

Soutenue le 6 mai 1981

devant la commission d'examen

Président : I. KUPKA

Examinateurs : Y. COLIN DE VERDIERE

B. MALGRANGE

INTRODUCTION.

L'étude de la trace d'opérateurs bien choisis peut s'avérer tout à fait fructueuse. Evoquons, par exemple, l'opérateur de la chaleur associé à un laplacien géométrique sur une variété compacte à partir duquel on parvient à lire dans le spectre du laplacien des informations sur la géométrie de la variété ([B.G.M], [A.B.P]), l'opérateur des ondes sur une variété compacte qui permet de relier le spectre du laplacien et celui des géodésiques périodiques ([C], [DG]) et la formule de trace exacte de Selberg pour une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, base de nombreux résultats en arithmétique ([V]).

Le travail qui suit est consacré à une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger avec potentiel dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, étude à rattacher au cadre général que nous venons d'esquisser : on verra en particulier comment certaines méthodes, certains résultats établis pour les situations précédentes apparaissent en filigrane dans notre étude. Le thème abordé ici n'est pas nouveau, on trouve certains de nos résultats dans des contextes particuliers ou sous des formes partielles dans la littérature mathématique ([B] 1962, [M.R] 1979, [CV] 1980).

Rappelons, tout d'abord, quelque terminologie de théorie spectrale. Soit A un opérateur auto-adjoint (borné ou non) d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Il lui est associé de manière unique une résolution spectrale $\{E(\lambda)\}$ i.e. une mesure borélienne E à valeurs projecteurs telle que $\mathrm{Id} = \int_{-\infty}^{+\infty} dE(\lambda)$ et $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE(\lambda)$.

A la décomposition des mesures $\langle dE(\lambda)h,h\rangle$, où h est un vecteur de $\mathfrak{H}$, en la somme d'une mesure discrète (i.e. somme de masses de Dirac), d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et d'une mesure continue singulière, correspond la décomposition orthogonale de l'espace $\mathfrak{H}$ en trois sous-espaces $\mathfrak{H}_d(A)$, $\mathfrak{H}_{ac}(A)$, $\mathfrak{H}_{sc}(A)$ stables par A (tels que la mesure $\langle dE(\lambda)h,h\rangle$ soit discrète si h est dans $\mathfrak{H}_d(A),\ldots$) et la décomposition du spectre $\sigma(A)$ de A en $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sc}(A)$ (où $\sigma_d(A)$ est le spectre de A restreint à $\mathfrak{H}_d(A),\ldots$). On note $P_{ac}(A)$ la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_{ac}$. D'autre part, on a le théorème de représentation spectrale : il existe une intégrale hilbertienne $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}(\lambda)d\mu(\lambda)$ telle que l'opérateur A soit unitairement équivalent à la multiplication par λ dans l'intégrale hilbertienne $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}(\lambda)d\mu(\lambda)$. Tout opérateur C commutant avec A est alors unitairement équivalent à un opérateur décomposable $\int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)d\mu(\lambda)$ de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}(\lambda)d\mu(\lambda)$.

Soit Δ le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et q un potentiel, que nous supposerons toujours dans la suite C^∞ à support compact. Cette hypothèse forte peut être atténuée (en q dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, q dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ldots$) dans certains énoncés que nous citerons ou établirons, on s'est tenu pourtant à cette hypothèse, d'une part afin d'alléger la rédaction, d'autre part, parce qu'elle nous semble être l'hypothèse convenable pour établir nos derniers résultats (existence d'un développement asymptotique). L'opérateur de Schrödinger $H = -\Delta + q$ (on notera H_0 l'opérateur de Schrödinger libre correspondant au potentiel q nul), opérant dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, est un opérateur auto-adjoint, dont le domaine est l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur H_0 , est, par la transformation de Fourier, unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $\|\xi\|^2$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$; son spectre est donc absolument continu, s'étalant sur $\mathbb{R}^+$ et de multiplicité deux pour la dimension $n = 1$, infinie sinon. La théorie spectrale de l'opérateur H est un problème difficile, sauf en dimension $n = 1$ où la théorie des équations différentielles fournit une transformation de Fourier distordue qui éclaire la théorie spectrale de l'opérateur H : son spectre est constitué d'un nombre fini de valeurs propres simples, strictement négatives et d'un spectre absolument continu de multiplicité deux s'étalant sur $\mathbb{R}^+$. Pour les dimensions supérieures, il est nécessaire de faire appel à la théorie de la diffusion, dont nous allons maintenant parler succintement.

En général, si A_1 et A_2 sont deux opérateurs auto-adjoints (bornés ou non) d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ séparable, on note, si les limites existent, $W_\pm(A_1,A_2) = \text{s-}\lim_{t\to\mp\infty} e^{itA_2}e^{-itA_1}P_{ac}(A_1)$ (où s-lim désigne une limite forte), opérateurs appelés opérateurs d'onde. Nous avons choisi, de façon arbitraire cette définition, prédominante chez les physiciens, la littérature mathématique préférant plutôt la définition "$t\to\pm\infty$" ; ce choix n'a toutefois pas d'autre conséquence que d'induire des variations de signe dans certains énoncés suivant les ouvrages consultés. S'ils existent, les opérateurs d'onde sont isométriques, entrelacent A_1 et A_2 et réalisent une équivalence unitaire entre la partie absolument continue de A_1 et une partie de celle de A_2 . Nous dirons qu'il y a complétude asymptotique si $\mathfrak{H}_{ac}(A_2) = \operatorname{Im} W_+(A_1,A_2) = \operatorname{Im} W_-(A_1,A_2)$. Dans ce cas l'opérateur de diffusion $S = W_-^* W_+$, opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_{ac}(A_1)$ et commutant avec $A_{1,ac} = A_1 P_{ac}(A_1)$, est unitairement équivalent à un opérateur décomposable $\int_{\sigma(A_1,ac)} \mathcal{S}(\lambda,A_1,A_2)d\lambda$ dans une représentation spectrale de $A_{1,ac}$. L'opérateur $\mathcal{S}(\lambda,A_1,A_2)$, unitaire, est appelé matrice de diffusion.

Il n'est pas inutile de rappeler ici comment la terminologie précédente fut introduite, à l'origine, en mécanique quantique. Dans le formalisme quantique ([LL]), l'état d'une particule libre (dans le champ de potentiel q resp.) de masse m dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est décrit par une fonction d'onde $\varphi(t)$ de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont l'évolution est régie par l'équation de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi$ ($i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+q)\varphi$ resp.), équation qu'on normalise en posant $\hbar = 1$ et $m = \frac{1}{2}$; on a ainsi $\varphi(t) = e^{-itH_0}\varphi_0$ ($\varphi(t) = e^{-itH}\varphi_0$ resp.). Soit φ_0 l'état initial d'une particule libre, l'existence de $W_-\varphi_0 = \lim_{t\to+\infty} e^{itH}e^{-itH_0}\varphi_0$ est équivalente à l'existence de ψ_0 tel que $\lim_{t\to+\infty} \|e^{-itH}\psi_0 - e^{-itH_0}\varphi_0\| = 0$ (et on a alors $\psi_0 = W_-\varphi_0$) i.e. l'existence d'une particule dans le champ de potentiel q , d'état initial ψ_0 qui ait, asymptotiquement dans le futur, le comportement de la particule libre d'état initial φ_0 (en particulier, la particule classique correspondante se sauve à l'infini). D'autre part, une fonction propre de H s'interprète comme un état stable de la particule (i.e. trajectoire fermée en mécanique classique). Alors, l'absence de spectre singulier pour H (i.e. $\mathfrak{H}_{ac}(H) \oplus \mathfrak{H}_d(H) = L^2(\mathbb{R}^3)$) et la complétude asymptotique s'interprètent ainsi : pour la particule, il n'y a que deux types d'état possibles, soit l'état stable, soit l'état où, dans le passé et dans le futur, la particule s'en va à l'infini. En particulier, une particule venant de l'infini ne peut être captée par le centre diffuseur (à courte portée suivant nos hypothèses de nullité à l'infini pour le potentiel q) représenté par le potentiel q ; si cette particule (dans le champ de potentiel q) est asymptote dans le passé, à une particule libre d'état initial φ_- (état créé par l'expérimentateur physique, par exemple sous forme d'un faisceau de particules envoyé sur une cible), alors elle sera asymptote dans le futur à une particule libre d'état initial $\varphi_+ = S\varphi_-$ (état mesuré par l'expérimentateur).

Le problème de complétude asymptotique a une réponse positive dans les deux cas suivants :

1. $A_1 = H_0$ et $A_2 = H$
2. A_2 est une perturbation à trace de A_1 .

La première situation a été l'objet d'abord des méthodes dites stationnaires (i.e. étude des résolvantes $R_0(z) = (H_0-z)^{-1}$, $R(z) = (H-z)^{-1}$ au voisinage du spectre et construction de transformations de Fourier distordues : Ikebe ([I] 1960) et Agmon ([A] 1975)), puis Enss (1977) a développé une méthode directe (i.e. sans passer par l'étude de la résolvante) dite de découpage de l'espace des phases ([GN]). Par ces méthodes, on montre en même temps l'absence de spectre singulier et la théorie spectrale de l'hamiltonien H peut être décrite : son spectre est constitué d'un nombre fini N de valeurs propres $\{\lambda_j\}$ négatives et d'un spectre absolument continu s'étalant sur $\mathbb{R}^+$; la partie absolument continue H_{ac} de l'hamiltonien H est unitairement équivalente à l'hamiltonien libre H_0 ([R.S 2,3]).

Rappelons l'invariance des opérateurs d'onde de Birman-Kato, sous la forme particulière suivante ([KA 2]) :

> Soient A_1 et A_2 deux opérateurs auto-adjoints à spectre positif, mis à part un nombre fini de valeurs propres négatives. Soit E réel négatif hors du spectre de A_1 et A_2. Si l'opérateur $(A_2-E)^{-\alpha} - (A_1-E)^{-\alpha}$ est à trace, pour un $\alpha > 0$, les opérateurs d'onde $W_{\pm}(A_1, A_2)$ existent, sont égaux à $W_{\mp}((A_1-E)^{-\alpha}, (A_2-E)^{-\alpha})$ et sont complets.

Nous montrons que pour E réel hors du spectre de H, l'opérateur $(H-E)^{-e(n)} - (H_0-E)^{-e(n)}$ (où $e(1) = 1$ et $e(n) = [\frac{n}{2}]$ sinon) est un opérateur à trace (Proposition III.1). Ainsi, via l'invariance de Birman-Kato, la complétude asymptotique dans le cas des opérateurs de Schrödinger (avec nos hypothèses) résulte-t-elle de la situation (soritale) 2. ([KA 2]), cadre dans lequel nous devons à Krein ([KR 1] 1953) la formule de trace suivante :

> Soient A_1 et A_2 deux opérateurs auto-adjoints bornés d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ séparable tels que $A_2 - A_1$ soit à trace. Notons $\Delta(z) = \det[1+(A_2-A_1)(A_1-z)^{-1}]$ pour z non réel. Alors, si Φ est une fonction de Schwartz, l'opérateur $\Phi(A_2) - \Phi(A_1)$ est à trace et on a la formule de trace
>
> $$\mathrm{Tr}\{\Phi(A_2) - \Phi(A_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)\Phi'(\lambda)d\lambda$$
>
> où la fonction ξ (appelée fonction spectrale de perturbation) est une fonction intégrable avec $\|\xi\|_1 \leq \|A_2 - A_1\|_1$, à support compact et vérifiant $\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{z\to\lambda,\ \mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Arg}\, \Delta(z)$ presque partout (où la convergence est non tangentielle). De plus, si $\mathcal{S}(\lambda)$ note la matrice de diffusion associée, $\mathcal{S}(\lambda) - 1$ est à trace et vérifie $\det \mathcal{S}(\lambda) = e^{-2i\pi\xi(\lambda)}$ presque partout sur le spectre absolument continu $\sigma_{ac}(A_1) = \sigma_{ac}(A_2)$.

Les résultats précédents sont l'objet de la partie II de ce travail. Il nous a paru bon de fournir une démonstration de la formule de trace, démonstration suivant grosso modo celle de Krein (qui, publiée en russe et non traduite, reste difficile d'accès), simplifiée cependant grâce au calcul global sur les idéaux $\mathfrak{I}_p$ d'opérateurs compacts mis au point dans des monographies postérieures ([G.K] 1969, [SI] 1979).

Alors, la formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger

$$\text{(T)} \quad \operatorname{Tr}\{\Phi(H)-\Phi(H_0)\} = \sum_j \Phi(\lambda_j) + \frac{\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(0,H_0,H)}{2i\pi}\Phi(0) + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty}\Phi(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda,H_0,H)\,d\lambda \ ,$$

Tr $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}'$

que nous établissons en toute dimension n, à l'exception des dimensions 2 et 4, résulte, du moins formellement, immédiatement de la formule de trace de Krein via l'invariance de Birman-Kato et une simple intégration par parties.

En fait, tout revient à étudier la fonction spectrale de perturbation

$$\xi_E(\lambda) = \lim_{z\to\lambda,\ \operatorname{Im} z>0} \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\det[1+(R(E)^{e(n)}-R_0(E)^{e(n)})(R_0(E)^{e(n)}-z)^{-1}] \ ,$$

ce qui est au coeur de la partie III. Nous y rappelons d'abord les résultats concernant les résolvantes $R_0(\theta)$, $R(\theta)$ opérant dans les espaces de Sobolev pondérés

$$H^{m,s} = \{u\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ (1-\Delta)^{m/2}(1+\|x\|^2)^{s/2}u(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

qu'ont établis, d'une part, Agmon ([A] 1975) pour l'existence des valeurs au bord $R_0(\lambda\pm i0)$, $R(\lambda\pm i0)$ $(\lambda>0)$, d'autre part, Jensen Kato ([JK 2] 1979, [J] 1980) pour l'étude de la singularité des résolvantes à l'origine (les résultats, annoncés, en dimension $n=1,2$ et 4, ne sont pas parus à ce jour). Nous en déduisons alors les informations suivantes pour la fonction ξ_E, où E est réel hors du spectre de H :

- ξ_E est localement constante en dehors du spectre $\sigma(R(E)^{e(n)})$.
- Si λ est une valeur propre non nulle de l'hamiltonien H, de multiplicité $\nu(\lambda,H)$, on a $\xi_E((\lambda-E)^{-e(n)}-) - \xi_E((\lambda-E)^{-e(n)}+) = \nu(\lambda,H)$.
- La fonction ξ_E est analytique sur $\mathring{\sigma}_{ac}(R_0(E)^{e(n)}) =]0,(-E)^{e(n)}[$.
- Si la dimension est distincte de $1,2$ et 4, $\xi_E((-E)^{-e(n)}-) - \xi_E((-E)^{-e(n)}+) = \nu(0,H)+\varepsilon$ où $\nu(0,H)$ est la multiplicité de la valeur propre zéro et ε est nul, sauf si $n=3$ et il y a résonance (i.e. il existe une fonction ψ dans $H^{1,-s}$ avec $s>\frac{1}{2}$ et non de carré intégrable, solution de $H\Psi=0$) auquel cas $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

En général, $\det \mathcal{S}(0)$ vaut 1 , sauf en dimension 3 s'il y a résonance, auquel cas $\det \mathcal{S}(0) = -1$. Ainsi, en choisissant la détermination appropriée du Log , ce qui est supposé dans la formule de trace (T) , nous pouvons écrire $\varepsilon = \dfrac{\operatorname{Log} \det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}$.

Chemin faisant, nous démontrons la relation

$$\text{(S)} \qquad \det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H) = \frac{\det_p [1+q_1 R_0(\lambda-i0)q_2]}{\det_p [1+q_1 R_0(\lambda+i0)q_2]} \cdot \exp \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \operatorname{Tr}\{[q_1 R_0(\lambda-i0)q_2]^{\ell} - [q_1 R_0(\lambda+i0)q_2]^{\ell}\}$$

où on a factorisé $q = q_1 q_2$ et p est un entier supérieur à $\frac{n}{2}$.

La formule de trace (T) est alors établie, à la fin de la partie III, pour les dimensions autres que $1, 2$ et 4 . Pour les dimensions 2 et 4 , en attendant l'étude annoncée par Jensen de la singularité des résolvantes $R_0(\theta)$, $R(\theta)$ à l'origine dans ces dimensions, qui donnera vraisemblablement sans peine le saut de la fonction spectrale ξ_E au point $(-E)^{e(n)}$, nous ne pouvons écrire la formule de trace (T) que sous sa forme avant l'intégration par parties (Remarque III.4).

Quant à la dimension 1 , elle est traitée dans la partie I où on a développé la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite de façon élémentaire (i.e. sans faire appel aux outils généraux de la théorie de la diffusion, qu'on a rappelés et qui sont largement utilisés dans la partie III) en partant de l'existence des transformations de Fourier distordues associées à l'hamiltonien H ([DS]). On y montre successivement l'existence des opérateurs d'onde selon la méthode de Cook, leur expression en fonction des transformations de Fourier, le fait que l'opérateur de diffusion est décomposable dans la représentation spectrale de l'hamiltonien libre H_0 fournie par la transformation de Fourier, l'expression de la matrice de diffusion $\mathcal{S}(k)$ (qui est une matrice carrée d'ordre 2), le comportement asymptotique des coefficients de $\mathcal{S}(k)$ et enfin la formule de trace (T). La méthode utilisée pour obtenir la formule de trace, à base de troncature, est analogue à celle utilisée pour montrer la formule de trace de Selberg pour une surface de Riemann non compacte ([L.P 1]), généralisée par Müller ([MU] 1980) à des variétés riemanniennes avec un nombre fini de pointes. Il nous semblerait intéressant, et c'est un problème ouvert, de démontrer la formule de trace (T) en dimension quelconque en adaptant ces dernières méthodes de séparation des variables à l'infini, qui permettent de se ramener à un problème concernant des équations différentielles (et qui est élémentaire au sens précédent).

Dans la partie IV, nous commençons par montrer, à partir de l'expression (S), l'existence en toute dimension n impaire d'un développement asymptotique, dérivable à tout ordre, en puissances de $\sqrt{\lambda}$ pour la phase de diffusion $s(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{Log} \det \mathcal{S}(\lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini (ce que nous avons établi pour la dimension 1 dans la partie I). Utilisant la formule de trace pour l'opérateur de la chaleur et l'existence du développement asymptotique pour $Z(t) = \operatorname{Tr}\{e^{-tH} - e^{-tH_0}\}$ au voisinage de zéro (de manière analogue au développement de Minakshisundaran-Pleyel de la trace de l'opérateur de la chaleur sur une variété compacte [M.S]), nous pouvons préciser ce développement

$$s(\lambda) - s(0) \sim \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{[\frac{n}{2}]} s_\ell^n \lambda^{-\ell} - N - \frac{\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi} - \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} s_\ell^n \lambda^{-\ell}$$

où les s_ℓ^n sont les intégrales de fonctionnelles polynomiales universelles de q et de ses dérivées. En dimension n paire, nous ne sommes parvenus à aucun résultat, mise à part la croissance polynomiale de la phase de diffusion $s(\lambda)$.

Puis, nous introduisons, pour E réel hors du spectre de H, la fonction zêta $\zeta_E(s) = \operatorname{Tr}\{(H-E)^{-s} - (H_0-E)^{-s}\}$, qui est définie holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 3e(n)\}$. A partir d'une relation entre $\zeta_E(s)$ et $Z(t)$ (via, de manière habituelle, la transformation de Mellin), nous obtenons le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ de ζ_E dont nous précisons les poles et les valeurs aux entiers négatifs.

En dimension n impaire, la fonction ζ_E admet les entiers négatifs comme zéros triviaux. Interprétant ces zéros triviaux, nous obtenons à l'aide de la formule de trace (T), les identités de trace

$$\sum_j \lambda_j^{\nu} = \int_0^{+\infty} \lambda^{\nu} \frac{d}{d\lambda}\left[\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{\nu+[\frac{n}{2}]} s_\ell^n \lambda^{-\ell} - s(\lambda)\right] d\lambda$$

où ν est un entier strictement positif, et le théorème de Levinson généralisé

$$N + \frac{\operatorname{Log} \det \mathcal{S}(0)}{2i\pi} = \left[s(\lambda) - \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{[\frac{n}{2}]} s_\ell^n \lambda^{-\ell}\right]_{+\infty}^{0} .$$

Dans la partie V, nous retrouvons, en considérant un obstacle compact Σ comme le support d'un potentiel infini, la formule de trace

$$\operatorname{Tr}\{e^{-tH_e} - e^{-tH_0}\} = -t\int_0^{\infty} \xi(\lambda,\Sigma) e^{-\lambda t} dt$$

établie par Jensen et Kato (1978) pour la diffusion par l'obstacle Σ . Dans cet article ([J.K 1]), la formule de trace de Krein est utilisée pour la première fois pour des problèmes de diffusion (du moins en-dehors de l'école russe, puisque Buslaev ([B]) utilise dans les années 60 les résultats de Krein pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$. A la même époque que Jensen et Kato, Lax et Phillips ([L.P 2] 1978) notaient (sans l'expliquer) la similitude de leur formule de trace avec celle de Krein). Remarquons que, si Jensen-Kato appliquent la formule de trace de Krein à l'opérateur de la chaleur dans leur étude de la diffusion par un obstacle, c'est la considération des résolvantes et de leurs puissances qui se révèle appropriée pour l'opérateur de Schrödinger avec potentiel. Mentionnons enfin l'étude de l'asymptotique de la phase de diffusion $\xi(\lambda,\Sigma)$, objet de nombreux articles (notamment [J.K], [M.R] 1978, [ME], [R] 1980, [P.P] 1981).

SOMMAIRE

I. - DIFFUSION SUR LA DROITE.

1. Théorie spectrale de l'hamiltonien.

Soit q une potentiel C^∞ à support compact. L'opérateur symétrique $-\dfrac{d^2}{dx^2}+q$ de domaine $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est essentiellement auto-adjoint ; sa fermeture, notée H, a pour domaine l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ et pour $f \in H^2(\mathbb{R})$, $Hf = \left(-\dfrac{d^2}{dx^2}+q\right)f$ au sens distribution. Pour $k \in \mathbb{C}$, les distributions T, solutions de

$$(E)_k \qquad \left(-\frac{d^2}{dx^2}+q\right)T = k^2 T$$

sont des fonctions C^∞ et on a le tableau suivant

(1.1)

x	$-\infty \qquad\qquad -a$	$a \qquad\qquad +\infty$
$f_1(x,k)$	$a_1(k)e^{ikx}+b_1(k)e^{-ikx}$	e^{ikx}
$f_2(x,k)$	e^{-ikx}	$a_2(k)e^{-ikx}+b_2(k)e^{ikx}$

où $f_{1,2}(x,k)$ vérifie $(E)_k$ et a est tel que q soit nul en dehors de $[-a,a]$.

Les coefficients $a_{1,2}(k)$ et $b_{1,2}(k)$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ et en utilisant la constance du wronskien de deux solutions de $(E)_k$, on obtient

(1.2) $\quad a_1(k) = a_2(k)\ , \quad k \in \mathbb{C}$

(1.3) $\quad \mathcal{S}(k)$ est unitaire pour $k \in \mathbb{R}$

(1.4) $\quad \mathcal{S}(k) = \overline{\mathcal{S}(-k)} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

où l'on a posé

(1.5) $\quad r_i(k) = \dfrac{b_i(k)}{a_i(k)} \qquad t(k) = \dfrac{1}{a_1(k)} = \dfrac{1}{a_2(k)} \qquad$ et $\qquad \mathcal{S}(k) = \begin{pmatrix} t(k) & r_2(k) \\ r_1(k) & t(k) \end{pmatrix}$.

La théorie spectrale de l'opérateur auto-adjoint H est décrite par le théorème suivant :

THEOREME I.1. [D.S] -

a) <u>L'opérateur H a un ensemble fini de valeurs propres</u> $\{\lambda_j \ , \ j=1,\dots,N\}$ <u>simples strictement négatives. Soit</u> $\{\varphi_j\}$ <u>une base orthonormée de fonctions propres</u>.

b) <u>Notons</u>

(1.6) $\quad \varphi_{1,+}(x,k) = \dfrac{f_2(x,k)}{a_2(k)} \quad , \quad \varphi_{2,+}(x,k) = \dfrac{f_1(x,k)}{a_1(k)} \quad ,$

$$\varphi_{1,-}(x,k) = \frac{f_1(x,-k)}{a_1(-k)} \quad \underline{\text{et}} \quad \varphi_{2,-}(x,k) = \frac{f_2(x,-k)}{a_2(-k)} \quad .$$

<u>L'opérateur $\mathcal{F}_{\pm}$ défini sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et à valeurs dans</u> $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^N \oplus L^2(\mathbb{R}^+, dk) \oplus L^2(\mathbb{R}^+, dk)$ <u>avec</u>

$$\mathcal{F}_{\pm} f = \left(\langle f, \varphi_j \rangle , \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{1,\pm}(x,k)} f(x) dx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{2,\pm}(x,k)} f(x) dx \right)$$

<u>se prolonge en un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{H}$. Notons $\mathcal{F}_{\pm,ac}$ le composé de $\mathcal{F}_{\pm}$ avec la projection sur $L^2(\mathbb{R}^+, dk) \oplus L^2(\mathbb{R}^+, dk)$. Le domaine de H est l'ensemble des f tels que $k^2 \mathcal{F}_{\pm,ac} f$ soit de carré intégrable et pour f dans le domaine de H ,</u> $\mathcal{F}_{\pm} Hf = (\lambda_j \langle f, \varphi_j \rangle , k^2 \mathcal{F}_{\pm,ac} f)$.

Ainsi le spectre de H est constitué d'un spectre discret fini de valeurs propres simples négatives et d'un spectre absolument continu de multiplicité 2 s'étalant sur $\mathbb{R}^+$. $\mathcal{F}_{\pm}$ ne donne pas, à proprement parler, une représentation spectrale de H . On en obtient une en prenant comme paramètre spectral $\lambda = k^2$ (i.e. l'énergie dans le formalisme quantique) au lieu de k (l'impulsion resp.). Néanmoins, et uniquement dans cette partie I, afin d'éviter la surcharge de "$\sqrt{\ }$"

nous considèrerons $\mathcal{F}_\pm$ comme donnant une représentation spectrale de H, quitte à opérer la traduction "$\lambda=k^2$" pour rattacher les énoncés de la partie I à ceux des parties III et IV.

2. Opérateurs d'onde. Matrice de diffusion.

Notons H_0 l'opérateur pour le potentiel $q=0$ (i.e. l'hamiltonien quantique libre) et $\mathcal{F}_0$ la transformation de Fourier $\mathcal{F}_\pm$ $(q=0)$ correspondante.

THEOREME I.2. -

a) Les opérateurs d'ondes $W_\pm = s-\lim\limits_{t\to\mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ existent.

b) On a $W_\pm = \mathcal{F}^*_{\pm,ac}\mathcal{F}_0$ et les opérateurs d'onde sont complets.

a) Existence (méthode de Cook).

L'opérateur $e^{itH}e^{-itH_0}$ étant isométrique, il suffit de démontrer l'existence de la limite forte $s-\lim\limits_{t\to\mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ sur une partie dense de $L^2(\mathbb{R})$. Si φ est une fonction de Schwartz, la fonction $e^{itH}e^{-itH_0}\varphi$ de la variable t à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$ est continûment dérivable, de dérivée $ie^{itH}qe^{-itH_0}\varphi$ et $e^{itH}e^{-itH_0}\varphi = \varphi + i\int_0^t e^{iuH}qe^{-iuH_0}\varphi du$. Si $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ, i.e. $\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\varphi(x)dx$, on a

$$(2.1)\qquad e^{-iuH_0}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}e^{-iuk^2}\hat{\varphi}(k)dk\ .$$

Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\varphi}$ soit à support compact. Par deux intégrations par parties successives, dans (2.1), nous obtenons

$$|e^{-iuH_0}\varphi(x)| \le \frac{1}{u^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left|\frac{d}{dk}\left\{\frac{1}{k}\frac{d}{dk}\frac{e^{-ikx}\hat{\varphi}(k)}{k}\right\}\right|dk \le \frac{C(\varphi)}{u^2}$$

et par suite

$$\|e^{iuH}qe^{-iuH_0}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \frac{C(\varphi)\|q\|_{L^2(\mathbb{R})}}{u^2}\ .$$

L'intégrale $\int_0^{\mp\infty} e^{iuH} q e^{-iuH_0} \varphi\, du$ converge absolument et l'espace des fonctions de Schwartz à spectre compact dans $\mathbb{R}^*$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur $W_\pm$ existe et vérifie

$$(2.2) \qquad W_\pm \varphi = \varphi + i \int_0^{\mp\infty} e^{iuH} q e^{-iuH_0} \varphi\, du$$

pour φ à spectre compact dans $\mathbb{R}^*$.

b) Complétude.

La complétude des opérateurs d'onde résulte des relations $W_\pm = \mathcal{F}^*_{\pm,ac} \mathcal{F}_0$. L'opérateur de conjugaison complexe entrelaçant W_+ et W_-, $\mathcal{F}^*_{+,ac} \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}^*_{-,ac} \mathcal{F}_0$, il nous suffit de montrer la relation $W_+ = \mathcal{F}^*_{+,ac} \mathcal{F}_0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à spectre compact dans $\mathbb{R}^*$. La convergence de l'intégrale dans (2.2) étant absolue, on a $W_+ \varphi = \varphi + i \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{-\infty} e^{\epsilon u} e^{iuH} q e^{-iuH_0} \varphi\, du$.

Notons $I_\epsilon(\varphi) = \int_0^{-\infty} e^{\epsilon u} e^{iuH} q e^{-iuH_0} \varphi\, du \quad (\epsilon > 0)$. Nous avons vu

$$(2.1) \qquad e^{-iuH_0} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-iuk^2} \hat{\varphi}(k)\, dk .$$

D'où

$$q e^{-iuH_0} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk^2} \hat{\varphi}(k) q(x) e^{-ikx}\, dk ,$$

où l'intégration est vectorielle dans $L^2(\mathbb{R}_x)$, et

$$I_\epsilon(\varphi) = \int_0^{-\infty} e^{\epsilon u} e^{iuH} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk^2} \hat{\varphi}(k) q(x) e^{-ikx}\, dk\, du$$

soit

$$I_\epsilon(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k) \left\{ \int_0^{-\infty} e^{\epsilon u} e^{iuH} e^{-iuk^2} [q(x) e^{-ikx}]\, du \right\} dk$$

après avoir appliqué Fubini dans $L^2(\mathbb{R}_u^- \times \mathbb{R}_k , L^2(\mathbb{R}_x))$, ce qui est légitime d'après la majoration $\| e^{\epsilon u} e^{iuH} q e^{-ikx} e^{-iuk^2} \hat{\varphi}(k) \|_{L^2(\mathbb{R}_x)} \leq e^{\epsilon u} |\hat{\varphi}(k)| \, \|q\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Intégrant $\int_0^{-\infty} e^{\epsilon u} e^{iuH} e^{-iuk^2} [q(x) e^{-ikx}]\, du$, nous obtenons

$$I_\epsilon(\varphi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k) (H - k^2 - i\epsilon)^{-1} [q(x) e^{-ikx}]\, dk .$$

Admettons pour l'instant le

LEMME I.1. - <u>Soit</u> $w(x,k,\varepsilon) = (H-k^2-i\varepsilon)^{-1}[q(x)e^{-ikx}]$ <u>où</u> $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. <u>La fonction</u> $w(x,k,\varepsilon)$ <u>admet un prolongement continu sur</u> $\{(x,k,\varepsilon), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}^*, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ <u>et</u> $w(x,k,0) = e^{-ikx} - \varphi_{1,+}(x,k)$ <u>si</u> $k > 0$, $w(x,k,0) = e^{-ikx} - \overline{\varphi_{2,+}(x,k)}$ <u>si</u> $k < 0$.

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle I_\varepsilon(\varphi), \psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k) \langle (H-k^2-i\varepsilon)^{-1}[q(x)e^{-ikx}], \psi\rangle dk$$

$$\langle I_\varepsilon(\varphi), \psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(k) \langle w(\varepsilon,k,x), \psi\rangle dk + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \hat{\varphi}(k) \langle w(\varepsilon,k,x), \psi\rangle dk$$

et d'après le lemme I.1,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle I_\varepsilon(\varphi), \psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\varphi}(k) \langle e^{-ikx} - \varphi_{1,+}(x,k), \psi\rangle dk + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \hat{\varphi}(k) \langle e^{-ikx} - \overline{\varphi_{2,+}(x,k)}, \psi\rangle dk$$

soit

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle I_\varepsilon(\varphi), \psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \langle \int_0^\infty \hat{\varphi}(k)[e^{-ikx} - \varphi_{1,+}(x,k)]dk, \psi\rangle + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \langle \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(-k)[e^{ikx} - \varphi_{2,+}(x,k)]dk, \psi\rangle$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle I_\varepsilon(\varphi), \psi\rangle = i\langle \varphi, \psi\rangle - i\langle \mathcal{F}^*_{+,ac} \mathcal{F}_0 \varphi, \psi\rangle .$$

On a donc montré $\langle W_+\varphi, \psi\rangle = \langle \mathcal{F}^*_{+,ac}\mathcal{F}_0\varphi, \psi\rangle$ pour tout φ C^∞ à spectre compact et ψ C^∞ à support compact, ce qui entraîne, par densité, $W_+ = \mathcal{F}^*_{+,ac}\mathcal{F}_0$.

<u>Démonstration du lemme I.1.</u> - La résolvante $R(\varkappa^2) = (H-\varkappa^2)^{-1}$, $\operatorname{Im} \varkappa > 0$ a pour noyau

$$R(\varkappa, x, y) = \begin{cases} -\dfrac{f_1(x,\varkappa) f_2(y,\varkappa)}{2i\varkappa a(\varkappa)} & \text{si } x \geq y \\[2ex] -\dfrac{f_2(x,\varkappa) f_1(y,\varkappa)}{2i\varkappa a(\varkappa)} & \text{si } x \leq y . \end{cases}$$

Ainsi, si $\sqrt{k^2+i\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ désigne la racine carrée de $k^2+i\varepsilon$ de partie imaginaire positive, on a

$$w(x,k,\varepsilon) = -\int_{-\infty}^{x} \frac{f_1(x,\sqrt{k^2+i\varepsilon})f_2(y,\sqrt{k^2+i\varepsilon})}{2i\sqrt{k^2+i\varepsilon}\;a(\sqrt{k^2+i\varepsilon})}\, q(y)e^{-iky}dy$$

$$-\int_{x}^{+\infty} \frac{f_2(x,\sqrt{k^2+i\varepsilon})f_1(y,\sqrt{k^2+i\varepsilon})}{2i\sqrt{k^2+i\varepsilon}\;a(\sqrt{k^2+i\varepsilon})}\, q(y)e^{-iky}dy$$

écriture qui donne aussitôt le prolongement cherché. On a alors

$$(2.3) \qquad w(x,k,0) = -f_1(x,k)\int_{-\infty}^{x} \frac{f_2(y,\tilde{k})}{2i\tilde{k}a(\tilde{k})}\, q(y)e^{-iky}dy - f_2(x,\tilde{k})\int_{x}^{+\infty} \frac{f_1(y,\tilde{k})}{2i\tilde{k}a(\tilde{k})}\, q(y)e^{-iky}dy$$

où l'on a noté $\tilde{k} = \dfrac{k^2}{|k|}$.

D'après sa définition, la fonction $w(x,k,\varepsilon)$ vérifie

$$(H-k^2-i\varepsilon)w(x,k,\varepsilon) = q(x)e^{-ikx}$$

et on en déduit

$$(H-k^2)[w(x,k,0)-e^{-ikx}] = 0 \;.$$

Utilisant le tableau (1.1) et le comportement à l'infini de $w(x,k,0)$ donné par (2.3), nous obtenons

$$w(x,k,0) = e^{-ikx} - \frac{f_2(x,k)}{a_2(k)} \qquad k > 0$$

$$w(x,k,0) = e^{-ikx} - \frac{f_1(x,-k)}{a_1(-k)} \qquad k < 0$$

ce qui, avec les définitions (1.6), n'est pas autre chose que le lemme I.1.

THEOREME I.3. - Dans la représentation spectrale de H_0 fournie par la transformation de Fourier $\mathcal{F}_0$, l'opérateur de diffusion $S = W_-^* W_+$ est décomposable et est la multiplication par la matrice $\mathcal{S}(k)$.

Il s'agit d'expliciter l'opérateur $\mathcal{S} = \mathcal{F}_0 S \mathcal{F}_0^* = \mathcal{F}_{-,ac}\mathcal{F}_{+,ac}^*$. Soient $\theta = (\theta_1,\theta_2)$ et $\eta = (\eta_1,\eta_2)$ deux éléments de $C_0^\infty(\mathbb{R}_*^+) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}_*^+)$. On a

$$\langle \mathcal{S}\theta,\eta\rangle = \langle \mathcal{F}_{+,ac}^*\theta \,,\, \mathcal{F}_{-,ac}^*\eta\rangle \quad , \text{ soit}$$

(2.4)

$$\langle \mathcal{S}\theta,\eta\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^\infty [\varphi_{1,+}(x,k)\theta_1(k)+\varphi_{2,+}(x,k)\theta_2(k)]dk\right\}\left\{\int_0^{+\infty}[\overline{\varphi_{1,-}(x,k)}\,\overline{\eta_1(k)}+\overline{\varphi_{2,-}(x,k)}\,\overline{\eta_2(k)}]dk\right\}dx$$

Calculons le terme $\Sigma_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}\varphi_{1,+}(x,k)\theta_1(k)dk\right\}\left\{\int_0^{+\infty}\overline{\varphi_{1,-}(x,k)}\,\overline{\eta_1(k)}dk\right\}dx$
que nous écrivons

$$\Sigma_{11} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left\{\int_0^{+\infty}\varphi_{1,+}(x,k)\theta_1(k)dk\right\}\left\{\int_0^{+\infty}\overline{\varphi_{1,-}(x,k)}\,\overline{\eta_1(k)}dk\right\}dx$$

pour pouvoir intervertir les intégrales. Si on pose

$$\sigma_{11}(a,\varepsilon) = \int_{-a}^{+a}\varphi_{1,+}(x,k+i\varepsilon)\overline{\varphi_{1,-}(x,k'+i\varepsilon)}dx \qquad (\varepsilon\geq 0)\ ,$$

on a

$$\Sigma_{11} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k')}\sigma_{11}(a,0)dkdk'\ . \tag{2.5}$$

Comme $H\varphi_{1,\pm}(x,\varkappa) = \varkappa^2\varphi_{1,\pm}(x,\varkappa)$, on a pour $\varepsilon > 0$

$$\sigma_{11}(a,\varepsilon) = \frac{1}{(k+i\varepsilon)^2-(k'-i\varepsilon)^2}\int_{-a}^{+a}\left\{H\varphi_{1,+}(x,k+i\varepsilon)\overline{\varphi_{1,-}(x,k'+i\varepsilon)} - \varphi_{1,+}(x,k+i\varepsilon)\overline{H\varphi_{1,-}(x,k'+i\varepsilon)}\right\}dx$$

et

$$\sigma_{11}(a,\varepsilon) = \frac{1}{(k+k')(k-k'+2i\varepsilon)}\left[\varphi_{1,+}(x,k+i\varepsilon)\overline{\varphi'_{1,-}(x,k'+i\varepsilon)} - \varphi'_{1,+}(x,k+i\varepsilon)\overline{\varphi_{1,-}(x,k'+i\varepsilon)}\right]_{-a}^{+a}\ .$$

Utilisant la définition de $\varphi_{1,\pm}$ et le tableau (1.1), nous obtenons pour a suffisamment grand $\sigma_{11}(a,\varepsilon) = \sigma^1_{11}(a,\varepsilon) + \sigma^2_{11}(a,\varepsilon)$ où

$$\sigma^1_{11}(a,\varepsilon) = \frac{e^{i(k+k')a}}{i(k+k')}\left[r_2(k+i\varepsilon)\overline{t(-k'-i\varepsilon)}+t(k+i\varepsilon)\overline{r_1(-k'-i\varepsilon)}\right]$$
$$+\ \frac{t(k+i\varepsilon)-\overline{t(-k'-i\varepsilon)}}{i(k-k'+2i\varepsilon)}\cos(k-k'+2i\varepsilon)a$$

et

$$\sigma^2_{11}(a,\varepsilon) = \frac{\sin(k-k'+2i\varepsilon)a}{k-k'+2i\varepsilon}\left[t(k+i\varepsilon)+\overline{t(-k'-i\varepsilon)}\right]\ .$$

Le premier terme $\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k')}\sigma^1_{11}(a,0)\,dkdk'$ de la décomposition correspondante dans (2.5) est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k')}\left[\frac{e^{i(k+k')a}}{i(k+k')}\{r_2(k)t(k')+t(k)r_1(k')\}+i\frac{t(k')-t(k)}{k-k'}\cos(k-k')a\right]dkdk'$$

et tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, vu le choix de θ_1 et η_1 . Quant au second terme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k')}\sigma^2_{11}(a,0)dkdk'$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k')}\,\frac{\sin(k-k')a}{k-k'}\,[t(k)+t(k')]\,dkdk'$$

soit $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \ell a}{\ell}\{\int_0^{+\infty} \theta_1(k)\overline{\eta_1(k-\ell)}[t(k)+t(k-\ell)]\,dk\}\,d\ell$,

il a pour limite $\int_0^{\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k)}\,t(k)dk$. Nous avons donc $\Sigma_{11} = \int_0^{\infty}\theta_1(k)\overline{\eta_1(k)}\,t(k)dk$. Le calcul des autres termes de (2.4) se développe de manière analogue, si bien que nous obtenons

$$\langle \mathcal{S}\theta,\eta\rangle = \int_0^{\infty}\langle \mathcal{S}(k)\theta(k),\eta(k)\rangle dk$$

et la proposition en résulte par un argument de densité.

Remarque I.1. - La matrice $\mathcal{S}(k)$ est ainsi la matrice de diffusion, ce qui explique naturellement son caractère unitaire un peu mystérieux vu en (1.3).

3. Développements asymptotiques.

Ecrivant que $f_1(x,k)$ est la solution valant e^{ikx} pour x grand de l'équation $+ f''+k^2f = qf$, où l'on considère qf comme second membre, on obtient les relations

$$(3.1) \qquad a_1(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)e^{-ikt}f_1(t,k)dt$$

$$(3.2) \qquad b_1(k) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt}q(t)f_1(t,k)dt \ .$$

PROPOSITION I.1.

a) $a_i(k)$ $(i=1,2)$ <u>a un développement asymptotique classique lorsque</u> $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ <u>et ce développement est dérivable à tout ordre</u>.

b) $kb_i(k)$ $(i=1,2)$ <u>est dans la classe de Schwartz</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Vu les relations (1.2), (1.3) et (1.5) il suffit de démontrer cette proposition pour $i = 1$.

Introduisons $m_1(x,k) = e^{-ikx}f_1(x,k)$. Cette fonction est la solution de

$$(3.3) \qquad m'' + 2ikm' = qm$$

valant 1 pour x grand. Si on note $D_k(v) = \int_0^v e^{2iku} du$, la fonction E_k définie par $E_k(v) = Y(-v)D_k(-v)$ est une solution élémentaire de l'équation (3.3) sans second membre et m_1 est aussi la solution de l'équation intégrale de Volterra

(3.4) $\quad m = 1 + E_k * qm$.

Soit la suite $(g_n(x,k))$ définie par $g_0 \equiv 1$ et $g_n = E_k * qg_{n-1}$ si $n \geq 1$. Pour $v > 0$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ on a $|D_k(v)| \leq v$ et pour $k \neq 0$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ on a $|D_k(v)| \leq \dfrac{2}{|k|}$. On en déduit

(3.5) $$|g_n(x,k)| \leq \frac{\left(\int_x^\infty |y-x|\,|q(y)|\,dy\right)^n}{n!} \quad , \quad \operatorname{Im} k \geq 0$$

(3.6) $$|g_n(x,k)| \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{|k|}\int_{-\infty}^{+\infty} |q(y)|\,dy\right)^n , \quad k \neq 0 \;,\quad \operatorname{Im} k \geq 0 \;.$$

La majoration (3.5) entraîne la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x,k)$ sur $[X,+\infty[$ et naturellement $m_1(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x,k)$. D'après (3.6), il suffit de montrer que chaque $g_n(x,k)$ admet un développement asymptotique lorsque $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ uniformément sur $[X,\infty[$ pour qu'il en soit de même pour $m_1(x,k)$, ce qui est clair en explicitant $g_n(x,k) = E_k * qE_k * \ldots * q$ (n+1 facteurs). Dérivant (3.4), nous obtenons

$$\frac{\partial m_1}{\partial x}(x,k) = \int_x^{+\infty} e^{2ik(y-x)} q(y) m_1(y,k)\,dy \;,$$

$\dfrac{\partial m_1}{\partial x}(x,k)$ a donc un développement asymptotique lorsque $k \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ uniformément sur $[X,\infty[$ et il en est de même pour $\dfrac{\partial^\alpha m_1}{\partial x^\alpha}(x,k)$ $(\alpha \geq 2)$ grâce à (3.3) et ses dérivées.

Avec les majorations

$$\left|\frac{\partial^\beta D_k}{\partial k^\beta}(v)\right| \leq \frac{2^\beta v^{\beta+1}}{\beta+1} \qquad v \geq 0 \;,\quad \operatorname{Im} k \geq 0$$

et

$$\left|\frac{\partial^\beta D_k}{\partial k^\beta}(v)\right| \leq \frac{(\beta+1)!\,(1+|v|)^\beta (1+2|k|)^\beta}{(2|k|)^{\beta+1}} \qquad \operatorname{Im} k \geq 0 \;,\quad k \neq 0$$

nous obtenons de manière analogue l'existence du développement asymptotique pour les dérivées croisées $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} m_1}{\partial x^\alpha \partial k^\beta}$.

Le développement asymptotique, dérivable à tout ordre, pour $a_1(k)$ en résulte aussitôt d'après (3.1) ainsi que la décroissance rapide de $kb_1(k)$ et de ses dérivées en utilisant (3.2), avec des intégrations par parties en quantité suffisante.

Vu les définitions (1.5), il résulte aussitôt de la proposition précédente le

THEOREME I.4. - $\det \mathcal{S}(k)$ <u>admet un développement asymptotique dérivable à tout ordre lorsque</u> $k \to \infty$.

Ce développement est de la forme $\det \mathcal{S}(k) \sim 1 + \frac{d_1}{k} + \frac{d_2}{k^2} + \ldots$. On précisera, dans la section IV.2, les coefficients σ_i du développement $\operatorname{Log} \det \mathcal{S}(k) \sim \frac{\sigma_1}{k} + \frac{\sigma_2}{k^2} + \ldots$.

4. La formule de trace.

D'après la théorie spectrale de H , l'opérateur $\Phi(H)$, où $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, est compact si et seulement si $\operatorname{Supp} \Phi \subset]-\infty, 0]$. On ne peut espérer de formule de trace concernant H seulement. Mais H est une "petite" perturbation de H_0 (au sens où la différence de leur résolvante est à trace, cf. Proposition III.1), ce qui incite à considérer l'opérateur $\Phi(H) - \Phi(H_0)$. Cet opérateur est la somme de l'opérateur de rang fini $\sum_{j=1}^{N} \Phi(\lambda_j)\langle\ ,\varphi_j\rangle\varphi_j$ et de l'opérateur de noyau

$$K_\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Phi(k^2)\left\{\varphi_{1,+}(x,k)\overline{\varphi_{1,+}(y,k)} + \varphi_{2,+}(x,k)\overline{\varphi_{2,+}(y,k)}\right\}dk$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \Phi(k^2)\left\{e^{-ikx}e^{iky} + e^{ikx}e^{-iky}\right\}dk$$

qui, après utilisation du tableau (1.1), se réduit à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k^2) r_2(k) e^{ik(x+y)} dk \qquad \text{si } x \geq a \ , \quad y \geq a$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k^2)\{t(k)-1\} e^{ik(x-y)} dk \qquad \text{si } x \geq a \ , \quad y \leq -a$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k^2)r_1(k)e^{-ik(x+y)}dk \qquad \text{si} \quad x\le -a \ , \quad y\le -a$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k^2)\{t(k)-1\}e^{ik(y-x)}dk \qquad \text{si} \quad x\le -a \ , \quad y\ge a \ .$$

L'opérateur $\Phi(H) - \Phi(H_0)$ est donc la somme d'un opérateur de rang fini et d'un opérateur à noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ d'après l'étude du comportement à l'infini des coefficients $r_i(k)$, $t(k)$ dans la section I.3. Il est à trace d'après le

LEMME I.2. - Soit $K(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et K l'opérateur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de noyau $K(x,y)$. L'opérateur K est à trace et $\operatorname{Tr} K = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,x)dx$.

En effet K est le composé des opérateurs d'Hilbert-Schmidt

K_1 de noyau $(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} K(x,y)$

et K_2 de noyau $\displaystyle\sum_{(\epsilon_i)\in\{-1,+1\}^n} \frac{\Pi\epsilon_i}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \chi_{I_{\epsilon_1}\times\ldots\times I_{\epsilon_n}}(y) \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$

où $I_\epsilon = \begin{cases}]-\infty,0] & \text{si} \quad \epsilon>0 \\ ]0,+\infty[& \text{si} \quad \epsilon<0 \ . \end{cases}$

Soit χ_a la fonction caractéristique de $[-a,+a]$. Alors

$$\operatorname{Tr}\{\Phi(H)-\Phi(H_0)\} = \lim_{a\to\infty} \operatorname{Tr} \chi_a\{\Phi(H)-\Phi(H_0)\}\chi_a$$

et le calcul de $\operatorname{Tr}\chi_a\{\Phi(H)-\Phi(H_0)\}\chi_a$ est mené via le même artifice que celui utilisé au cours du calcul de Σ_{11} dans la section I.2, pour obtenir la formule de trace :

THEOREME I.5. - Soit sur la droite réelle q un potentiel C^∞ à support compact, $H_0 = -\Delta$ et $H = -\Delta + q$. L'opérateur $\Phi(H)-\Phi(H_0)$ est à trace et

$$\operatorname{Tr}\{\Phi(H)-\Phi(H_0)\} = \sum_{j=1}^{N}\Phi(\lambda_j) + \frac{\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}\Phi(0) + \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty \Phi(k^2)\frac{d}{dk}\operatorname{Log}\det\mathcal{S}(k)dk \ .$$

Remarque I.2. - On a $\det \mathcal{S}(0)^2 = 1$. Le cas générique est $\det\mathcal{S}(0) = 1$ et dans ce cas, toutes les solutions T de $(-\Delta+q)T = 0$ sont à croissance linéaire au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$. Le cas $\det \mathcal{S}(0) = -1$ correspond aux potentiels q possédant une résonance, i.e. pour lesquels il existe une solution bornée de $(-\Delta + q)T = 0$. ([D.T] Théorème 1, p. 146 et Remarque 2, p. 152). On convient que "Log" écrit dans la formule de trace désigne la détermination du Log pour laquelle $\text{Log}\, 1 = 0$ et $\text{Log}(-1) = i\pi$.

II. - LA FORMULE DE TRACE DE KREIN.

1. La fonction spectrale de perturbation

THEOREME II.1 - [KR1] [KR2].

Soient A_1, A_2 deux opérateurs auto-adjoints bornés d'un Hilbert séparable $\mathfrak{H}$ dont la différence est un opérateur à trace. Soit $\{E_i(\lambda)\}$ la résolution spectrale de A_i. Notons $\| \ \|_1$ la norme trace de l'idéal $\mathfrak{J}_1(\mathfrak{H})$ des opérateurs à trace de $\mathfrak{H}$. Alors $\mathrm{Tr}\left\{\frac{dE_1}{d\lambda} - \frac{dE_2}{d\lambda}\right\}$ est une distribution à support compact, dérivée d'une fonction intégrable ξ nulle en dehors de l'enveloppe convexe $\hat{\sigma} = \mathrm{Co}(\sigma(A_1), \sigma(A_2))$ des spectres de A_1 et A_2 et vérifiant $\|\xi\|_1 \leq \|A_2 - A_1\|_1$. Si on note $\Delta(z) = \det[1+(A_2-A_1)(A_1-z)^{-1}]$, alors $\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathrm{Arg}\, \Delta(\lambda+i\epsilon)$ presque partout où Arg désigne la détermination principale de l'argument.

DEFINITION II.1 - ξ est appelée fonction spectrale de perturbation (en anglais : spectral shift (resp. displacement, translation) function ([J.K1, B.K., KR2] resp.).

L'opérateur $\Phi(A_i)$ étant défini à partir de la résolution spectrale de A_i par $\Phi(A_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) dE_i(\lambda)$, il s'agit de démontrer :

(i) si Φ est une fonction C^∞ à support compact, $\Phi(A_2) - \Phi(A_1)$ est un opérateur à trace ;

(ii) l'existence de $\xi \in L^1(\mathbb{R})$, avec les propriétés mentionnées dans le théorème, telle que l'on ait la formule de trace

$$\text{(T)} \quad \operatorname{Tr}\{\Phi(A_2)-\Phi(A_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)\Phi'(\lambda)d\lambda \quad , \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \ .$$

1.1. Réduction.

En fait, on démontre (i) et (ii) dans les paragraphes suivants 1.2 et 1.3 pour la classe de fonctions $\{\Phi_z / \Phi_z(\lambda) = \frac{1}{z-\lambda} \ , \ \operatorname{Im} z > 0\}$. L'admettant, on a

$$(T_z) \ : \ \operatorname{Tr}\{(A_2-z)^{-1} - (A_1-z)^{-1}\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)\frac{d\lambda}{(z-\lambda)^2} \quad , \quad \operatorname{Im} z > 0 \ .$$

L'intégration dans le membre de droite ayant lieu sur le compact $\hat{\sigma}$, ce membre est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\hat{\sigma}$ et (T_z) est vérifiée, par prolongement analytique, sur ce domaine. Soit γ un lacet entourant $\hat{\sigma}$. Intégrant suivant γ $e^{\alpha z}\{(A_2-z)^{-1} - (A_1-z)^{-1}\}$ dans $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{H})$ d'une part, $e^{\alpha z}\operatorname{Tr}\{(A_1-z)^{-1} - (A_2-z)^{-1}\}$ d'autre part puis appliquant Fubini et la formule de Cauchy, nous obtenons que

$$e^{\alpha A_1} - e^{\alpha A_2} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\alpha z}\{(A_2-z)^{-1}-(A_1-z)^{-1}\}dz$$

$\|e^{\alpha A_1} - e^{\alpha A_2}\|_1 \le \|A_2-A_1\|_1 \int_\gamma |e^{\alpha z}|\, dz \cdot \|(A_1-z)\|_\infty \, \|(A_2-z)\|_\infty$

est un opérateur à trace, et que

$$\operatorname{Tr}\{e^{\alpha A_2} - e^{\alpha A_1}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{\alpha\lambda}\xi(\lambda)d\lambda$$

$\|e^{itA_2} - e^{itA_1}\| \le C|t|$

puis que

$$\Phi(A_2) - \Phi(A_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{e^{itA_2} - e^{itA_1}\}d\mu(t)$$

est un opérateur à trace, et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr}\{e^{itA_2} - e^{itA_1}\}d\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ite^{it\lambda}\,\xi(\lambda)d\lambda d\mu(t) \ , \quad \text{i.e. (T)}$$

(après interversion des intégrales) pour les fonctions Φ qui sont transformées de Fourier d'une mesure μ possédant des moments d'ordre 0 et 1 , en particulier les fonctions Φ de $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

1.2. Perturbation $A_2 - A_1$ de rang 1 .

$A_2 - A_1$ est alors de la forme $A_2 - A_1 = \epsilon\tau\langle . ,\varphi\rangle\varphi$ où $\tau \in \mathbb{R}_*^+$, $\epsilon^2 = 1$ et $\|\varphi\|^2 = 1$. Nous pouvons supposer $\epsilon = 1$, quitte à permuter A_2 et A_1 . Pour $z \notin \sigma(A_2) \cup \sigma(A_1)$, l'opérateur $(A_2-z)^{-1} - (A_1-z)^{-1}$ est à trace d'après l'équation de la résolvante

$$(A_1-z)^{-1} - (A_2-z)^{-1} = (A_1-z)^{-1}(A_2-A_1)(A_2-z)^{-1}$$

et on a

$$\Delta(z) = \det\{1 + (A_2-A_1)(A_1-z)^{-1}\} = 1 + \tau\langle (A_1-z)^{-1}\varphi,\varphi\rangle$$

soit

$$\Delta(z) = 1 + \tau\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\|E_1(\lambda)\varphi\|^2}{\lambda - z} .$$

Par suite,

$$\operatorname{Im} \Delta(z) = \tau\,(\operatorname{Im} z)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\|E_1(\lambda)\varphi\|^2}{|\lambda-z|^2}$$

et (1.1) $0 \leq \operatorname{Im} \operatorname{Log}\Delta(z) \leq \pi$ si $\operatorname{Im} z > 0$ en ayant choisi la détermination principale du Log.

Rappelons quelques résultats sur les valeurs au bord des fonctions harmoniques sur un demi-plan.

THEOREME II.2 [S.W]. -

Hille

a) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty]$ et $u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)P(x-t,y)dt$ son intégrale de Poisson où $P(t,\alpha) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$. Alors u est harmonique sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$, $\lim\limits_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x)$ presque partout et
$$\|u(.,y)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|^p dx\right)^{1/p} \leq \|f\|_p \quad , \quad y > 0 .$$

b) Si u est harmonique sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$ et s'il existe $p \in [1,\infty]$ tel que $\sup\limits_{y>0} \|u(.,y)\|_p < +\infty$, alors

(i) si $1 < p \leq \infty$, u est l'intégrale de Poisson d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$

(ii) si $p = 1$, u est l'intégrale de Poisson-Stieljes d'une mesure de Borel finie. De plus, si $u(.,y)$ est Cauchy en norme L^1 lorsque $y \to 0^+$, u est l'intégrale de Poisson d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Ainsi, d'après b) (i) $(p=\infty)$ et (1.1), il existe une fonction $\xi \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que sur le demi-plan $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ on ait

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\,\Delta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\xi(\lambda)}{(x-\lambda)^2+y^2}\, d\lambda = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}\, \frac{\xi(\lambda)}{z-\lambda}\, d\lambda$$

avec, d'après a), $\xi(\lambda) = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\,\Delta(\lambda+i\epsilon)$ presque partout. En fait, $\Delta(z) = \det\left[1 + (A_2-A_1)(A_1-z)^{-1}\right] = \det(A_2-z)(A_1-z)^{-1}$ est holomorphe non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\hat{\sigma}$ et $\mathrm{Log}\,\Delta(z)$ défini sur $\mathbb{C}^+ = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ a un prolongement uniforme sur un voisinage simplement connexe de $\overline{\mathbb{C}^+} - \hat{\sigma}$. A_2 et A_1 étant auto-adjoints, $\Delta(z)$ est réel pour z réel. $\xi(\lambda)$ est donc continue et à valeurs entières sur $\mathbb{R}\setminus\hat{\sigma}$; vu $\Delta(z) = 1 + 0\left(\frac{1}{|z|}\right)$ (pour $z \to \infty$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$) et la détermination du Log choisie, ξ est nulle sur $\mathbb{R}\setminus\hat{\sigma}$. Par suite, la fonction $\frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a $\mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\,\Delta(z) = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda-z}\, d\lambda$. Les fonctions holomorphes $\mathrm{Log}\,\Delta(z)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda-z} d\lambda$ ayant même partie imaginaire et étant toutes deux nulles à l'infini sont donc égales. Dérivant cette égalité et utilisant le

LEMME II.1 [G.K]. - Avec les hypothèses du théorème II.1 :
$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Log}\,\Delta(z) = \mathrm{Tr}\{(A_1-z)^{-1} - (A_2-z)^{-1}\}\ , \quad \mathrm{Im}\, z > 0\ ,$$

nous obtenons

$$(T_z) \qquad \mathrm{Tr}\{(A_1-z)^{-1} - (A_2-z)^{-1}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda-z)^2}\, d\lambda\ .$$

(T_{iy}) s'écrit $\mathrm{Tr}\{iy(A-iy)^{-1}(A_2-A_1)(A_1-iy)^{-1}iy\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(iy)^2\xi(\lambda)}{(iy-\lambda)^2}\, d\lambda$.

Lorsque $y \to \infty$, $iy(A_k-iy)^{-1}$ converge vers -1 fortement. D'après un théorème de Grümm [SI, p.42], il y a alors convergence dans $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{H})$ de $iy(A_2-iy)^{-1}(A_2-A_1)(A_1-iy)^{-1}iy$ vers A_2-A_1. On obtient ainsi $\mathrm{Tr}\{A_2-A_1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)d\lambda$ i.e. puisque ξ est positive et $\mathrm{Tr}\{A_2-A_1\} = \tau = \|A_2-A_1\|_1$, $\|\xi\|_1 = \|A_2-A_1\|_1$.

1.3. Perturbation quelconque.

Ecrivons $A_2-A_1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} T_j$ où les T_j sont auto-adjoints de rang 1 (voire nuls pour $j > r$ si A_2-A_1 est de rang fini r) et posons

$B_n = A_{1+\frac{n}{n+1}} = A_1 + \sum_{j=1}^{n} T_j \quad (n \geq 0)$, $R_n(z) = (B_n - z)^{-1}$,

$\Delta_n(z) = \det[1+(B_n-B_0)(B_0-z)^{-1}] = \prod_{j=0}^{n-1} \det(B_{j+1}-z)(B_j-z)^{-1}$ et ξ_n la fonction spectrale de perturbation (définie en 1.2) associée au couple (B_n, B_{n+1}) .

Les fonctions, définies sur $\mathbb{C}^+$, $\operatorname{Log}\Delta_n(z)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(\lambda)}{\lambda - z} = \sum_{0}^{n-1} \operatorname{Log}\det(B_{j+1}-z)(B_j-z)^{-1}$ diffèrent d'une constante et s'annulent à l'infini, on a donc

$$\operatorname{Log}\Delta_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$$

et

$$(1.2) \quad \operatorname{Im}\operatorname{Log}\Delta_n(z) = \operatorname{Arg}\Delta_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(\lambda)}{(x-\lambda)^2+y^2} d\lambda \ .$$

D'après le paragraphe précédent, on a

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j(\lambda)| d\lambda \leq \sum_{j=1}^{n} \|T_j\|_1 \leq \|A_2 - A_1\|_1$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j$ dans $L^1(\mathbb{R})$. En appliquant le théorème de convergence dominée au membre intégral de (1.2) nous obtenons

$$\operatorname{Arg}\Delta(z) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}\Delta_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\xi(\lambda)}{(x-\lambda)^2+y^2} d\lambda \qquad (\operatorname{Im} z > 0) \ .$$

La fonction analytique $\operatorname{Arg}\Delta(z)$ est ainsi la transformée de Poisson de la fonction $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ et d'après le théorème II.2, on a $\xi(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg}\Delta(\lambda + i\varepsilon)$ presque partout. On en déduit que ξ est nulle sur $\mathbb{R}\backslash\hat{\sigma}$ et on termine comme ci-dessus pour avoir (T_z). L'inégalité $\|\xi\|_1 \leq \|A_2 - A_1\|_1$ découle de (1.3).

<u>Remarque II.1.</u> - On a $\xi(\lambda) = \lim_{z\to\lambda,\ \operatorname{Im} z>0} \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\Delta(z)$ si z converge vers λ non tangentiellement d'après le petit complément correspondant sur la convergence non tangentielle au théorème II.2 ([S.W]).

<u>Remarque II.2.</u> - Si λ_0 est un point isolé de $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ (i.e. une valeur propre de A_i de multiplicité $\nu(\lambda_0, A_i)$ $i=1,2$ avec $\nu(\lambda_0, A_1) + \nu(\lambda_0, A_2) > 0$), ξ est une fonction en escalier au voisinage de λ_0 avec un saut $\xi(\lambda_0+) - \xi(\lambda_0-) = \nu(\lambda_0, A_1) - \nu(\lambda_0, A_2)$ en λ_0. Cela résulte du

LEMME II.2. [G.K] - <u>Soient</u> A_1, A_2 <u>opérateurs auto-adjoints bornés tels que</u> $A_2 - A_1$ <u>soit à trace. Soit</u> λ_0 <u>point isolé de</u> $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$. λ_0 <u>est valeur propre de</u> A_1 <u>ou</u> A_2, <u>de multiplicité respective</u> ν_1, ν_2 <u>et il existe une constante</u> $C(A_2, A_1)$ <u>non nulle telle que</u>

$$\det[1+(A_2-A_1)(A_1-z)^{-1}] \underset{z \to \lambda_0}{\sim} C(A_2, A_1)(z-\lambda_0)^{\nu_2 - \nu_1}$$

2. Fonction spectrale de perturbation et matrice de diffusion

A_2 et A_1 vérifiant les hypothèses du théorème II.1, les opérateurs d'onde $W_\pm = W_\pm(A_1, A_2) = s - \lim_{t \to \mp\infty} e^{itA_2} e^{-itA_1} P_{ac,1}$ ($P_{ac,1}$ note le projecteur sur le sous-espace d'absolue continuité de A_1) existent et sont complets ([KA 2]). Soit une décomposition spectrale de $A_{1,ac} = P_{ac,1} A_1$ i.e. un isomorphisme unitaire de $P_{ac,1}(\mathfrak{H})$ avec une intégrale hilbertienne $\int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathfrak{H}(\lambda, A_{1,ac}) d\lambda$ transformant l'algèbre des opérateurs $\Phi(A_{1,ac})$, $\Phi \in L^\infty(\sigma_{ac}(A_1), d\lambda)$ en l'algèbre des opérateurs diagonalisables. Cette décomposition spectrale est unique à opérateur unitaire décomposable près ([DI]). L'opérateur de diffusion $S(A_1, A_2) = S = W_-^* W_+$ est un opérateur unitaire de $P_{ac,1}(\mathfrak{H})$ qui, commutant à $A_{1,ac}$, est unitairement équivalent à un opérateur décomposable $\mathcal{S} = \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathcal{S}(\lambda) d\lambda$ de $\int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathfrak{H}(\lambda, A_{1,ac}) d\lambda$. Si $\simeq$ note une égalité à équivalence unitaire près, on a donc $S \simeq \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathcal{S}(\lambda) d\lambda$. La matrice de diffusion $\mathcal{S}(\lambda)$ associée au couple (A_1, A_2) est ainsi définie à équivalence unitaire près et presque partout sur $\sigma_{ac}(A_1)$.

THEOREME II.3 [B.K] . - Avec les hypothèses et notations du théorème II.1 et de la remarque II.1, si $\mathcal{S}(\lambda)$ désigne la matrice de diffusion associée au couple (A_1, A_2) , alors, presque partout sur $\sigma_{ac}(A_1)$, l'opérateur $\mathcal{S}(\lambda) - 1$ est un opérateur à trace de $\mathfrak{H}(\lambda, A_{1,ac})$ et

$$\det \mathcal{S}(\lambda) = e^{-2i\pi\,\xi(\lambda)} = \lim_{z\to\lambda, \operatorname{Im} z>0} \frac{\Delta(\bar{z})}{\Delta(z)} .$$

2.1. Perturbation de rang 1 .

On a $A_2 = A_1 + c\langle\ ,\varphi\rangle\varphi$. Le théorème II.3 résulte de l'étude explicite de [KA 1] . $P_{ac,1}(\mathfrak{H})$ y est décomposé en la somme hilbertienne de $P_{ac,1}(\mathfrak{H}(\varphi))$, où $\mathfrak{H}(\varphi)$ est le plus petit sous-espace fermé contenant φ est stable par A_1 , et de son orthogonal. $P_{ac,1}(\mathfrak{H}(\varphi))$ est isomorphe à $L^2(\sigma_{ac}(A_1), \frac{d\|E_1(\lambda)\varphi\|^2}{d\lambda} d\lambda)$ sur lequel S agit par la multiplication par $e^{-2i\pi\,\xi(\lambda)}$. Sur $P_{ac,1}(\mathfrak{H}(\varphi))^{\perp}$, S agit trivialement comme l'Id . Ainsi $S \simeq \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathcal{S}(\lambda) d\lambda$ avec $\mathcal{S}(\lambda) - \mathrm{Id}$ à trace tel que $\|\mathcal{S}(\lambda) - \mathrm{Id}\|_1 = |e^{-2i\pi\xi(\lambda)} - 1|$ et $\det \mathcal{S}(\lambda) = e^{-2i\pi\xi(\lambda)}$ presque partout sur $\sigma_{ac}(A_1)$.

2.2. Perturbation quelconque.

Reprenons les notations de II.1.3. Utilisant les propriétés de multiplication des opérateurs d'onde

$$W_{\pm}(B_i, B_{i+2}) = W_{\pm}(B_{i+1}, B_{i+2}) W_{\pm}(B_i, B_{i+1})$$

nous pouvons écrire

$$(2.1) \quad S_n = S(B_0, B_n) = \prod_{j=1}^{n-1} S'(B_j, B_{j+1}) S(B_0, B_1)$$

où $S'(B_j, B_{j+1}) = W_-^*(B_0, B_{j+1}) S(B_j, B_{j+1}) W_-(B_0, B_j)$

L'opérateur B_{j+1} étant une perturbation de rang 1 de B_j , d'après ce qui précède [2.1] , si

$$P_{ac,j}(\mathfrak{H}) \simeq \int_{\sigma_{ac}(B_j)} \mathfrak{H}(\lambda, B_{j,ac}) d\lambda ,$$

nous avons

$$S(B_j, B_{j+1}) \simeq \int_{\sigma_{ac}(B_j)} \mathcal{S}_j(\lambda) d\lambda$$

où l'opérateur à trace $\mathcal{S}_j(\lambda) - \mathrm{Id}$ de $\mathfrak{H}(\lambda, B_{j,ac})$ vérifie

$$\|\mathcal{S}_j(\lambda) - \mathrm{Id}\|_1 = e^{-2i\pi\xi_j(\lambda)} \quad \text{et} \quad \det \mathcal{S}_j(\lambda) = e^{-2i\pi\xi_j(\lambda)} \quad \text{presque partout.}$$

$W_-(B_0, B_j)$ entrelaçant B_0 et B_j, l'opérateur $S'(B_j, B_{j+1})$ de $P_{ac,1}(\mathfrak{H}) \simeq \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathfrak{H}(\lambda, A_{1,ac}) d\lambda$ commute avec $B_0 = A_1$ et est donc décomposable. On a $S'(B_j, B_{j+1}) \simeq \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathcal{S}'_j(\lambda) d\lambda$ avec $\mathcal{S}_j(\lambda) \simeq \mathcal{S}'_j(\lambda)$ presque partout, d'après l'unicité à équivalence unitaire près de la décomposition spectrale.

(2.1) s'écrit alors

$$S_n \simeq \int_{\sigma_{ac}(B_0)} \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{S}'_j(\lambda) \mathcal{S}_0(\lambda) d\lambda .$$

$\sum_{j=0}^{\infty} |\xi_j(\lambda)|$ étant finie presque partout, le produit infini $\mathcal{S}_\infty(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{S}'_j(\lambda) \mathcal{S}_0(\lambda)$ converge dans $\mathrm{Id} + \mathfrak{J}_1(\mathfrak{H}(\lambda, B_{0,ac}))$ presque partout. La convergence ayant lieu a fortiori dans $\mathcal{B}(h(\lambda, B_{0,ac}))$ et $\mathcal{S}_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{S}'_j(\lambda) \mathcal{S}_0(\lambda)$ étant unitaire, S_n converge fortement vers $S_\infty \simeq \int_{\sigma_{ac}(B_0)} \mathcal{S}_\infty(\lambda) d\lambda$ ([DI]). Or S_n converge fortement vers $S(B_0, B_\infty)$ [KA 2, p. 553], donc

$$S(A_1, A_2) \simeq \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathcal{S}_\infty(\lambda) d\lambda$$

et $$\det \mathcal{S}_\infty(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \det \mathcal{S}'_j(\lambda) \det \mathcal{S}_0(\lambda) d\lambda = e^{-\sum_{j=0}^{\infty} 2i\pi\xi_j(\lambda)} = e^{-2i\pi\xi(\lambda)}$$

presque partout.

3. Invariance des opérateurs d'onde

Cette invariance, constituant le "principe d'invariance de Birman-Kato" est relativement générale et valable avec des hypothèses de type variable. Enonçons le résultat particulier qui nous sera utile.

THEOREME II.4. [KA 2] - <u>Soient</u> A_1, A_2 <u>opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement par</u> $m+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. <u>Si</u> $(m+A_1)^{-\alpha} - (m+A_2)^{-\alpha}$ <u>pour un</u> $\alpha > 0$ <u>est à trace, les opérateurs</u> $W_\pm(A_1, A_2)$ <u>existent, sont complets et égaux à</u> $W_\mp((m+A_1)^{-\alpha}, (m+A_2)^{-\alpha})$.

Les opérateurs de diffusion $S(A_1, A_2)$ et $S((m+A_1)^{-\alpha}, (m+A_2)^{-\alpha})$ sont donc inverses l'un de l'autre.

PROPOSITION II.1. - <u>Si</u> $S(A_1, A_2) \simeq \int_{\sigma_{ac}(A_1)} \mathcal{S}(\lambda, A_1, A_2) d\lambda$ <u>et</u>

$$S((m+A_1)^{-\alpha}, (m+A_2)^{-\alpha}) \simeq \int_{\sigma_{ac}((m+A_1)^{-\alpha})} \mathcal{S}(\lambda, (m+A_1)^{-\alpha}, (m+A_2)^{-\alpha}) d\lambda \ ,$$

<u>on a</u> $\mathcal{S}(\lambda, A_1, A_2) \simeq \mathcal{S}^{-1}((m+\lambda)^{-\alpha}, (m+A_1)^{-\alpha}, (m+A_2)^{-\alpha})$ <u>presque partout</u>.

Soit A opérateur auto-adjoint de l'espace $\mathfrak{H} \simeq \int_{\sigma(A)} \mathfrak{H}(\lambda, A) d\lambda$ et Φ un difféomorphisme de $\mathbb{R}$. Notons $\mathfrak{H}_\Phi(\lambda)$ l'espace $\mathfrak{H}(\Phi^{-1}(\lambda), A)$ muni du produit scalaire $\langle \ , \ \rangle_{\mathfrak{H}(\Phi^{-1}(\lambda), A)} \, |\Phi'(\Phi^{-1}(\lambda))|$. Alors l'homomorphisme U de $\int_{\sigma(A)} \mathfrak{H}(\lambda, A) d\lambda$ dans $\int_{\sigma(\Phi(A))} \mathfrak{H}_\Phi(\lambda) d\lambda$ défini par $U\left(\int_{\sigma(A)} x(\lambda) d\lambda\right) = \int_{\sigma(\Phi(A))} x(\Phi^{-1}(\lambda)) d\lambda$ est un isomorphisme isométrique et pour un opérateur décomposable $\int_{\sigma(A)} \mathcal{T}(\lambda) d\lambda$, on a $U \circ \int_{\sigma(A)} \mathcal{T}(\lambda) d\lambda = \int_{\sigma(\Phi(A))} \mathcal{T}(\Phi^{-1}(\lambda)) d\lambda \circ U$.

La proposition en résulte en appliquant l'unicité de la décomposition spectrale à équivalence unitaire près.

<u>Remarque II.3.</u> - Seules importent, pour les opérateurs d'ondes, les parties absolument continues des opérateurs A_1 et A_2 . Ainsi les énoncés précédents restent valables pour m , réel hors des spectres de A_1 et A_2 , minorant les spectres absolument continus de A_1 et A_2 .

III. - LA FORMULE DE TRACE POUR L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER DANS $\mathbb{R}^n$.

Précisons les notations utilisées dans la suite. Sauf indications particulières, l'espace $\mathbb{R}^n$ où agissent les hamiltoniens est de dimension quelconque. Le potentiel q est supposé C^∞ à support compact. On note $H_0 = -\Delta$ l'hamiltonien libre et $H = -\Delta + q$ l'hamiltonien avec potentiel. On désigne par $\rho(A)$ (resp. $\sigma(A)$, $\sigma_{ac}(A)$) l'ensemble résolvant (resp. le spectre, le spectre absolument continu) de A pour un opérateur auto-adjoint A. Pour $\zeta \in \rho(A)$, $R(\zeta)$ désigne la résolvante $R(\zeta) = (A-\zeta)^{-1}$.

Le spectre de H est constitué d'un nombre fini N de valeurs propres (λ_j) (répétées suivant leur multiplicité) négatives ou nulles et d'un spectre absolument continu s'étalant sur $\mathbb{R}^+$. Les opérateurs d'onde $W_\pm = s-\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ existent et sont complets ([R.S 2,3]). L'opérateur de diffusion $S = W_-^* W_+$ est un opérateur unitaire, décomposable dans une représentation spectrale de H_0 (on en obtient une via la transformée de Fourier, pour laquelle on a $L^2(\mathbb{R}^n) \simeq \int_0^{+\infty} L^2(S^{n-1}) \frac{\lambda^{\frac{n}{2}-1}}{2} d\lambda$). On note enfin $\mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)$ la matrice de diffusion associée.

1. Espaces de Sobolev pondérés.

Les travaux d'Agmon [A] ont montré qu'un cadre convenable pour l'étude des valeurs au bord de résolvante $R(\lambda \pm io)$ était fourni par les espaces de Sobolev pondérés

$$H^{m,s} = H^{m,s}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ ,\ (1-\Delta)^{m/2}(1+\|x\|^2)^{s/2}u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

où m et s sont réels. Ce sont des espaces hilbertisables, normés par l'une des deux normes hilbertiennes équivalentes $\|u\|_{m,s} = \|(1-\Delta)^{m/2}(1+\|x\|^2)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ et $\|u\|'_{m,s} = \|(1+\|x\|^2)^{s/2}(1-\Delta)^{m/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Les injections $H^{m,s} \hookrightarrow H^{m',s'}$ si $m \geq m'$ et $s \geq s'$ sont des injections denses. $\mathcal{B}(m,s\ ;\ m',s')$ notera l'espace des opérateurs continus de $H^{m,s}$ dans $H^{m',s'}$ et $H^{m,s}_{\Sigma} = H^{m,s}_{\Sigma}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions de $H^{m,s}$ à support contenu dans Σ.

On a $\Delta H^{m,s} \subset H^{m-2,s}$ et $(-\Delta-\zeta)^{-1}$, défini pour $\zeta \notin \mathbb{R}^+$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ via la transformation de Fourier, envoie continûment $H^{m,s}$ dans $H^{m+2,s}$. Sur $L^2(\mathbb{R}^n) = H^{0,0}$, $(-\Delta-\zeta)^{-1}$ coïncide avec la résolvante $R_0(\zeta)$, d'où la notation (abusive) $R_0(\zeta) = (-\Delta-\zeta)^{-1}$. On précisera, s'il y a ambiguïté, entre quels espaces opère $R_0(\zeta)$. H, fermeture auto-adjointe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de $(-\Delta+q\ ,\ C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ désignera aussi (encore abusivement) l'opérateur $-\Delta+q$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, pour lequel on a $HH^{m,s} \subset H^{m-2,s}$. Dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, la première équation de la résolvante s'écrit

(1.1) $\quad R(\zeta) = R_0(\zeta)[1+qR_0(\zeta)]^{-1}\ ,\qquad \zeta \in \rho(H)$.

Avant de prolonger cette équation à $H^{m,s}$, établissons le

LEMME III.1. - Soient $\mathfrak{H},\mathfrak{H}'$ des espaces de Hilbert séparables avec une injection dense $i : \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}'$. Soient U,K (resp. U',K') des opérateurs de $\mathfrak{H}$ (resp. $\mathfrak{H}'$) avec U et U' inversibles, K et K' compacts et tels que $U'i = iU$ et $K'i = iK$.

a) Mise à part l'origine, les spectres de K et K' avec multiplicité (resp. multiplicité ~~géométrique~~) coïncident.

algébrique

cf Reed-Simon IV p 9.

b) Si K et K' sont à trace, $\det_{\mathfrak{H}}[1+K] = \det_{\mathfrak{H}'}[1+K']$.

c) $U+K$ est inversible si et seulement si $U'+K'$ l'est.

L'espace propre $E(\lambda, K)$ associé à la valeur propre λ non nulle de multiplicité $\nu(\lambda, K)$ s'injecte dans $E(\lambda, K')$ d'où $\nu(\lambda, K) \leq \nu(\lambda, K')$. Il en est de même en ce qui concerne les multiplicités ~~géométriques~~ alg. $\mu(\lambda, .)$, où $\mu(\lambda, K)$ désigne la dimension du terme stationnaire de la suite des noyaux itérés $\mathrm{Ker}(K-\lambda \mathrm{Id})^{\alpha}$. En considérant les adjoints, on a $\nu(\bar{\lambda}, K'^*) \leq \nu(\bar{\lambda}, K^*)$ et $\mu(\bar{\lambda}, K'^*) \leq \mu(\bar{\lambda}, K^*)$. Alors a) résulte des égalités $\nu(\lambda, K) = \nu(\bar{\lambda}, K^*)$ et $\mu(\lambda, K) = \mu(\bar{\lambda}, K^*)$, b) de l'égalité $\det_{\mathfrak{H}}[1+K] = \prod_{\lambda} 1+\lambda$ où λ décrit la suite des valeurs propres, répétées selon leur multiplicité géométrique, de K et l'assertion c) de a) appliquée aux opérateurs compacts $U^{-1}K$ et $U'^{-1}K'$.

L'opérateur $qR_0(\zeta)$ opérant dans $H^{m,s}$ $(m, s \in \mathbb{R})$ est, d'après les théorèmes d'injection compacte de Rellich, un opérateur compact. Ainsi, d'après le lemme précédent, et l'alternative de Fredholm l'opérateur $1+qR_0(\zeta)$ $(\zeta \in \rho(H))$, inversible lorsqu'il opère dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, est inversible dans $H^{m,s}$ et la première équation de la résolvante (1.1) permet de définir $R(\zeta)$ sur les espaces $H^{m,s}$. La seconde équation de la résolvante dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est

(1.2) $$R(\zeta) = R_0(\zeta) - R(\zeta)qR_0(\zeta), \quad \zeta \in \rho(H).$$

Par continuité, elle reste valable dans $H^{m,s}$ $(m, s \in \mathbb{R}^n)$.

Avant de poursuivre, il nous faut introduire les idéaux $\mathfrak{I}_p$ et rappeler quelques-unes de leurs propriétés.

Si $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert séparables, notons $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$ et $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ $(p > 0)$ l'espace des opérateurs compacts K de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ dont la suite des valeurs singulières (μ_n) (i.e. les valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité de $\sqrt{KK^*}$ ou $\sqrt{K^*K}$) est dans $\ell^p(\mathbb{N})$. Muni de la norme définie par $\|K\|_p = (\Sigma \mu_n^p)^{1/p}$, $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ est un Banach ; $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ est un idéal de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ au sens suivant : $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2') \circ \mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) \circ \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1', \mathfrak{H}_1) \subset \mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1', \mathfrak{H}_2')$. Ainsi si $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ sont deux espaces hilbertisables, l'idéal $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1, \| \, \|_1 ; \mathfrak{H}_2, \| \, \|_2)$ est indépendant des normes hilbertiennes $\| \, \|_1$ et $\| \, \|_2$ définissant la topologie de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ resp. et on note

$\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$ cet idéal. On a $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)^* = \mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_2,\mathfrak{H}_1)$ et la propriété höldérienne : $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_2,\mathfrak{H}_3)\circ\mathfrak{I}_q(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2) \subset \mathfrak{I}_r(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_3)$ pour p,q,r vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Notons enfin $\mathfrak{I}_{p+}(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2) = \bigcap_{r>p}\mathfrak{I}_r(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$. (Pour l'étude des idéaux $\mathfrak{I}_p(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$, on se reportera à [SI]. Les résultats y sont établis dans le cas $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$ et leur généralisation au cas de deux espaces distincts est sans difficultés).

LEMME III.2. - <u>Soit</u> Σ <u>un compact de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et soient</u> $m\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_*^+$. <u>L'injection</u> $H_\Sigma^{m+r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{m,s}(\mathbb{R}^n)$ <u>est un opérateur compact de classe</u> $\mathfrak{I}_{\frac{n}{r}+}(H_\Sigma^{m+r}(\mathbb{R}^n), H^{m,s}(\mathbb{R}^n))$.

Soit a tel que Σ soit contenu dans le pavé $]-a,a[^n$, $\mathbb{T}^n$ le tore $\mathbb{R}^n/(2a\,\mathbb{Z})^n$ et φ une fonction C^∞ à support compact dans $]-a,a[^n$ valant 1 sur Σ. Alors l'injection $H_\Sigma^{m+r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{m,s}(\mathbb{R}^n)$ est la composée de l'application naturelle $H_\Sigma^{m+r}(\mathbb{R}^n) \to H^{m+r}(\mathbb{T}^n)$, de l'injection $i_{m+r,m} : H^{m+r}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^m(\mathbb{T}^n)$ et de $P_\varphi : H^m(\mathbb{T}^n) \to H^{m,s}(\mathbb{R}^n)$ où $P_\varphi f$ à support dans $[-a,a]^n$, relevée sur $\mathbb{T}^n$, est égale à φf. Via le développement des distributions sur le tore en série de Fourier, $H^\sigma(\mathbb{T}^n)$ est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z}^n,(1+\|k\|)^{2\sigma})$ ($\|k\|$ note la norme euclidienne de $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$). Alors $i_{m+r,m}$ est de classe $\mathfrak{I}_{\frac{n}{r}+}(H^{m+r}(T^n),H^m(T^n))$, et le lemme III.2 en résulte, d'après le

LEMME III.3. - <u>Soit</u> α,β <u>des réels vérifiant</u> $\alpha-\beta>0$. <u>L'injection</u> $I(\alpha,\beta) : \ell^2(\mathbb{Z}^n,(1+\|k\|)^\alpha) \hookrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n,(1+\|k\|)^\beta)$ <u>est dans l'idéal</u> $\mathfrak{I}_{\frac{2n}{\alpha-\beta}+}(\ell^2(\mathbb{Z}^n,(1+\|k\|)^\alpha),\ell^2(\mathbb{Z}^n,(1+\|k\|)^\beta))$.

Les valeurs singulières de $I(\alpha,\beta)$ sont $((1+\|k\|)^{2(\beta-\alpha)}, k\in\mathbb{Z}^n)$. Il suffit alors de remarquer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+\|k\|)^{2(\beta-\alpha)p}$, de même nature que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^{2(\beta-\alpha)p}dx$, est convergente si et seulement si $p>\frac{2n}{\alpha-\beta}$.

PROPOSITION III.1. - <u>Soient</u> α <u>entier et</u> m,s,s' <u>des réels. Si</u> $\zeta\in\rho(H)$, $R(\zeta)^\alpha - R_0(\zeta)^\alpha$ <u>est un opérateur compact de classe</u> $\mathfrak{I}_{\frac{n}{2(\alpha+1)}+}(H^{m,s},H^{m,s'})$.

La seconde équation de la résolvante (1.2) donne

$$R(\zeta)^{\alpha} - R_0(\zeta)^{\alpha} = \sum_{\mu=(\mu_i)} \epsilon(\mu) R_0(\zeta)^{\mu_0} R(\zeta) q R_0(\zeta) R_0(\zeta)^{\mu_1} \dots R(\zeta) q R_0(\zeta) R_0(\zeta)^{\mu_k}$$

où la somme porte sur les $k+1$ -plets $\mu = (\mu_i)$ vérifiant $\sum_{i=0}^{k} \mu_i = \alpha - k$ pour $k = 1,\dots,\alpha$ et $\epsilon(\mu) = (-1)^k$. Remarquant que les opérateurs $R_0(\zeta)$, $R(\zeta)$ sont des opérateurs de $\mathcal{B}(m,s\,;\,m+2,s)$, la proposition découle directement du lemme III.2 et des propriétés des idéaux $\mathfrak{I}_p$.

En particulier, si $e(n)$ $(n\neq 1)$ désigne la partie entière $[\frac{n}{2}]$ de $\frac{n}{2}$ et si on pose $e(1) = 1$, l'opérateur $R(\zeta)^{e(n)} - R_0(\zeta)^{e(n)}$ est un opérateur à trace de $H^{m,s}$. Pour $E \in \mathbb{R}\backslash\sigma(H)$, $R(E)^{e(n)}$ et $R_0(E)^{e(n)}$ sont des opérateurs auto-adjoints de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont la différence est à trace, la théorie de Krein (II) leur est donc applicable.

Notons Δ_E le déterminant de perturbation,
$\Delta_E(z) = \det[1+[R(E)^{e(n)}-R_0(E)^{e(n)}]\,[R_0(E)^{e(n)}-z]^{-1}]$, ξ_E la fonction spectrale de perturbation, $\xi_E(\lambda) = \lim_{z\to\lambda\,,\,\mathrm{Im}\,z>0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg}\Delta(z)$, $\sigma_{ac,E}$ le spectre absolument continu de $R_0(E)^{e(n)}$ (et de $R(E)^{e(n)}$), à savoir l'intervalle $[0,(-E)^{-e(n)}]$ et $\mathcal{S}_E(\lambda)$ la matrice de diffusion $\mathcal{S}_E(\lambda) \simeq \mathcal{S}(\lambda, R_0(E)^{e(n)}, R(E)^{e(n)})$ pour λ dans $\sigma_{ac,E}$.

La fonction ξ_E est localement constante sur le complémentaire du spectre de $\sigma_{ac,E}$ et, d'après la remarque II.2, le saut de ξ_E , i.e. $\xi_E((-E+\lambda_j)^{-e(n)}+) - \xi_E((-E+\lambda_j)^{-e(n)}-)$, au point isolé $(-E+\lambda_j)^{-e(n)}$ du spectre de $R(E)^{e(n)}$ correspondant à une valeur propre λ_j strictement négative de H , est égal à l'opposé de la multiplicité $\nu(\lambda_j,H)$ de λ_j . L'étude de ξ_E sur le spectre absolument continu $\sigma_{ac,E}$ est l'objet des sections suivantes.

2. La résolvante $R_0(\zeta)$ au voisinage de $\mathbb{R}^+$.

Nous rappelons ici (sans démonstration) quelques résultats concernant la résolvante $R_0(\zeta)$. Ils sont à la base de l'étude de la fonction spectrale ξ_E d'une part sur $\mathring{\sigma}_{ac,E}$ pour (2.1), d'autre part au point $(-E)^{-e(n)}$ pour (2.2).

2.1. Valeurs au bord ([A]).

2.1.1. Le spectre de H_0 s'étalant sur $\mathbb{R}^+$, il est clair que la fonction analytique $R_0(\zeta)$ définie sur $\mathbb{C}^{\pm} = \{\pm \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ à valeurs dans $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ n'a pas de valeurs au bord $R_0(\lambda \pm i0) = \lim_{\zeta\to\lambda\,,\ \pm\operatorname{Im}\zeta>0} R_0(\zeta)$ pour la topologie de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Mais si on considère la fonction analytique $R_0(\zeta)$ sur $\mathbb{C}^{\pm}$ à valeurs dans $\mathcal{B}(0,s\,;2,-s)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Agmon [A] a démontré l'existence des valeurs au bord $R_0(\lambda \pm i0)$ pour la topologie de $\mathcal{B}(0,s\,;2,-s)$ et alors, la fonction $R_0(\zeta)$ ainsi prolongée sur $\overline{\mathbb{C}^{\pm}_{*}} = \{\pm\operatorname{Im}\zeta \geq 0\ ,\ \zeta \neq 0\}$ y est continue. $R_0(\zeta)$ étant un opérateur de convolution, on a des résultats analogues pour la fonction $R_0(\zeta)$ à valeurs dans $\mathcal{B}(m,s\,;m+2,-s)$ $(m \in \mathbb{R})$.

2.1.2. Le potentiel q étant à support compact, l'opérateur H (dans $L^2(\mathbb{R}^n)$) n'a pas de valeurs propres positives et par suite, l'opérateur $1+qR_0(\lambda \pm i0)$, perturbation compacte de l'identité dans $H^{0,s}$, est injectif, donc inversible, pour $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$. Le lemme III.1 implique qu'il en est de même pour l'opérateur $1+qR_0(\lambda \pm i0)$ de $H^{m,s}$ $(m \in \mathbb{R})$.

2.2. $R_0(\zeta)$ au voisinage de $\zeta = 0$ ([J.K][J]).

Les résultats ne sont établis que dans les dimensions $n=3$ ou $n \geq 5$.

2.2.1. La fonction à valeurs opérateur $R_0(\zeta)$ $(\operatorname{Im}\zeta > 0)$ dans $\mathcal{B}(m,s\,;m+2,-s)$ (s à préciser) admet un développement asymptotique au voisinage de $\zeta = 0$ dans l'échelle $\{\zeta^{j/2}, \zeta^j(\operatorname{Log}\zeta)^\ell\}$ au sens suivant : formellement, on a :

si n est impair, $R_0(\zeta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (i\zeta^{\frac{1}{2}})^j G_j$ avec $G_1 = 0$ si $n \geq 5$

si n est pair, $R_0(\zeta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\mu(j)} \zeta^j (\operatorname{Log}\zeta)^\ell G_j^\ell$ avec $\mu(1) = \mu(0) = 0$

$G_0^2 = G_0$

(on notera $G_1^0 = -G_2$) ; et pour p donné, il existe un réel $s(p,n)$, dépendant de manière croissante de p et de la dimension n tel que pour $s \geq s(p,n)$

$$\|R_0(\zeta) - \sum_{j=0}^{2p} (i\zeta^{\frac{1}{2}})^j G_j\|_{\mathcal{B}(m,s\,;\,m+2,-s)} = O(\zeta^{2p+\frac{1}{2}})$$

$$\|R_0(\zeta) - \sum_{j=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{\mu(j)} \zeta^j (\mathrm{Log}\,\zeta)^\ell G_j^\ell\|_{\mathcal{B}(m,s\,;\,m+2,-s)} = O(\zeta^{p+1}\,\mathrm{Log}\,\zeta)\ .$$

2.2.2. Soit $\mathcal{M}$ le noyau de $1+G_0q$ dans $H^{1,-s}$ $(s>\frac{1}{2})$. $\mathcal{M}$ est indépendant de s et ses éléments sont des distributions vérifiant $Hf = 0$. $\mathcal{M}$ contient l'espace propre (des fonctions L^2) de la valeur propre 0 de l'hamiltonien H. Pour $n \geq 5$, les éléments de $\mathcal{M}$ sont tous des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour $n = 3$, une fonction de $\mathcal{M}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si elle est orthogonale au potentiel q. Ainsi $\mathcal{M}$ modulo $L^2(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 0 ou 1 et dans le cas de la dimension 1 (on dit qu'il y a résonance) on introduit la résonance dite canonique, i.e. la fonction ψ de $\mathcal{M}$ caractérisée par $P_0qG_2q\psi = 0$ (où P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{M} \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$) et $\langle q,\psi\rangle = (4\pi)^{\frac{1}{2}}$. Pour l'opérateur compact G_0q de $H^{-1,s}$, la suite de ses noyaux itérés $\mathrm{Ker}(1+G_0q)^\alpha$ est constante, on a donc la décomposition $H^{1,-s} = \mathrm{Ker}(1+G_0q) \oplus \mathrm{Im}(1+G_0q)$. Notons Q_0 le projecteur projetant $H^{1,-s}$ sur $\mathcal{M}$ parallèlement à $\mathrm{Im}(1+G_0q)$ et $Q_2 = -P_0qG_2q(1-Q_0)$. S'il y a résonance, Q_2 projette $H^{1,-s}$ sur $\mathcal{M} \cap L^2$ parallèlement à ψ, sinon $Q_2 = 1-Q_0$. Posons $Q_1 = 1-Q_0-Q_2$. ($Q_1 = 0$ sauf s'il y a résonance, auquel cas Q_1 est la projection sur ψ parallèlement à $\mathcal{M} \cap L^2(\mathbb{R}^3)$). On a alors les relations de nullité $(1+G_0q)Q_i = 0$, $Q_i^*(1+qG_0) = 0$ $(i=1,2)$, $Q_1^*qG_2qQ_2 = 0$, $Q_2^*qG_1qQ_1 = 0$ et on démontre que les opérateurs $Q_0(1+G_0q)Q_0$ de $\mathcal{B}(Q_0H^{1,-s})$, $Q_1^*qG_1qQ_1$ de $\mathcal{B}(Q_1H^{1,-s}, Q_1^*H^{-1,s})$ et $Q_2^*qG_2qQ_2$ de $\mathcal{B}(Q_2H^{1,-s}, Q_2^*H^{-1,s})$ sont inversibles.

3. La fonction spectrale de perturbation ξ_E sur $\sigma_{ac,E}$.

Posons $\lambda = (\mu-E)^{-e(n)}$ pour μ dans $\mathbb{R}^+$ et $D_E(\theta) = \Delta_E((\theta-E)^{-e(n)})$ pour θ dans $V\backslash\mathbb{R}$ où V désigne un voisinage de $\mathbb{R}^+$ tel que si θ est dans $V\backslash\mathbb{R}^+$, $(\theta-E)^{-e(n)}$ soit non réel. Nous avons, d'après le théorème II.1

et la remarque II.1,

$$(3.1)\qquad \xi_E((\mu-E)^{-e(n)}) = \lim_{\theta\to\mu\,,\ \mathrm{Im}\,\theta>0} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arg}\, D_E(\bar\theta) = \lim_{\theta\to\mu\,,\ \mathrm{Im}\,\theta>0} \overset{\text{Arg}}{\overline{\frac{1}{\pi} D_E(\theta)}}\ .$$

Notons $T_E(\theta) = [R(E)^{e(n)} - R_0(E)^{e(n)}][R_0(E)^{e(n)} - (\theta - E)^{-e(n)}]^{-1}$ pour θ dans $V\backslash\mathbb{R}$.

L'opérateur $T_E(\theta)$, opérant dans L^2 , est à valeurs dans $H^{0,s}$ $(s>0)$, on a donc

$$D_E(\theta) = \det 1 + T_E(\theta) = \det_{H^{0,s}} 1 + T_E(\theta) \quad , \quad s>0 \ , \quad \theta \text{ dans } V\backslash\mathbb{R} \ ,$$

où l'écriture $\det_{H^{0,s}} 1 + T_E(\theta)$ signifie que l'on considère l'opérateur $T_E(\theta)$ comme opérateur de $H^{0,s}$.

Pour θ dans $V\backslash\mathbb{R}$, l'opérateur $R_0(E)^{e(n)} - (\theta - E)^{-e(n)}$ de $H^{m,s}$, équivalent par la transformation de Fourier à l'opérateur de multiplication par $(\|x\|^2 - E)^{-e(n)} - (\theta - E)^{-e(n)}$ dans $H^{s,m}$ (fonction bornée ainsi que son inverse sur $\mathbb{R}^n$), est un opérateur inversible de $H^{m,s}$, remarque qui permet de considérer l'opérateur $T_E(\theta)$ comme opérateur de $H^{m,s}$. D'après la proposition III.1, cet opérateur est à trace dans $H^{m,s}$ et appliquant le lemme III.1 nous obtenons

$$(3.2)\qquad D_E(\theta) = \det_{H^{m,s}} 1 + T_E(\theta) \qquad s>0 \ , \quad m\in\mathbb{R} \ , \quad \theta\in V\backslash\mathbb{R} \ .$$

Utilisant les identités algébriques

$$(\lambda-E)^{-\alpha} - (\theta-E)^{-\alpha} = [(\lambda-E)^{-1} - (\theta-E)^{-1}][\sum_{\beta=0}^{\alpha-1} (\lambda-E)^{-\beta}(\theta-E)^{\beta-\alpha+1}]$$

$$(\lambda-E)^{-1} - (\theta-E)^{-1} = -(\theta-E)^{-1}(\lambda-E)^{-1}(\lambda-\theta)$$

nous obtenons pour l'opérateur $T_E(\theta)$ de $\mathfrak{J}_1(H^{m,s})$ la factorisation

$$(3.3)\qquad T_E(\theta) = -[R(E)^{e(n)} - R_0(E)^{e(n)}][\sum_{\beta=0}^{e(n)-1} R_0(E)^{\beta}(\theta-E)^{\beta-e(n)}]^{-1}[H_0 - E]R_0(\theta)$$

où les facteurs sont, dans l'ordre de composition, des opérateurs de $\mathcal{B}(m,s\,;m+2,-s)$, $\mathcal{B}(m+2,-s\,;m,-s)$, $\mathcal{B}(m,-s\,;m,-s)$ et $\mathfrak{J}_1(m,-s\,;m,s)$ respectivement.

Notons $\Sigma_0(E,\theta) = \sum_{\beta=0}^{e(n)-1} R_0(E)^{\beta}(\theta-E)^{\beta-e(n)}$ pour θ complexe et $\Sigma(E,\theta)$ l'analogue pour $R(E)$.

En écrivant $1+T_E(\theta) = [R(E)^{e(n)} - (\theta-E)^{-e(n)}][R_0(E)^{e(n)} - (\theta-E)^{-e(n)}]^{-1}$, nous obtenons pour l'opérateur $1+T_E(\theta)$ de $\mathcal{B}(H^{m,s})$ la factorisation

$$(3.4) \qquad 1+T_E(\theta) = \Sigma(E,\theta)R(E)[1+qR_0(\theta)][H_0-E][\Sigma_0(E,\theta)]^{-1}$$

où les facteurs sont, dans l'ordre de composition, des opérateurs de $\mathcal{B}(m,s\,;m,s)$, $\mathcal{B}(m,s\,;m-2,s)$, $\mathcal{B}(m-2,s\,;m-2,s)$, $\mathcal{B}(m-2,s\,;0,s)$ et $\mathcal{B}(m,s\,;m,s)$ respectivement.

L'opérateur $\Sigma_0(E,\theta)$ de $H^{m,s}$, équivalent par la transformation de Fourier à l'opérateur de multiplication par $\sum_{\beta=0}^{e(n)-1} (\|x\|^2-E)^{-\beta}(\theta-E)^{\beta-e(n)}$ dans $H^{s,m}$, est un opérateur inversible pour θ dans V, il en est de même, d'après le lemme III.1 pour l'opérateur $\Sigma(E,\theta)$ de $H^{m,s}$, qui est une perturbation compacte de $\Sigma_0(E,\theta)$ (on le voit en utilisant la seconde équation de la résolvante (1.2)) et qui, comme opérateur de $H^{0,0} = L^2$, est inversible (car équivalent à l'opérateur de multiplication par $\sum_{\beta=0}^{e(n)-1} (\lambda-E)^{-\beta}(\theta-E)^{\beta-e(n)}$, $\lambda \in \sigma(H)$, dans une représentation spectrale de H).

3.1. Analycité.

PROPOSITION III.2. - $\underline{\xi_E \text{ est continue sur } \mathring{\sigma}_{ac,E}} =]0,(-E)^{-e(n)}[$.

Utilisant les résultats d'Agmon (2.1.1) et la factorisation (3.3), nous voyons que la fonction $T_E(\theta)$ à valeurs dans $\mathfrak{I}_1(H^{m,s})$ ($s>\frac{1}{2}$ et m réel) définie sur $\mathbb{C}^{\pm}$ admet un prolongement continu sur $\overline{\mathbb{C}^{\pm}_*}$, dont nous notons $T_E(\mu\pm i0)$ les valeurs au bord, qui, d'après la factorisation

$$(3.4)' \qquad 1+T_E(\mu\pm i0) = \Sigma(E,\mu)R(E)[1+qR_0(\mu\pm i0)][H_0-E][\Sigma_0(E,\mu)]^{-1} ,$$

ne contiennent pas -1 dans leur spectre. Ainsi, le prolongement à $\overline{\mathbb{C}^{\pm}_*}$ de la fonction $D_E(\theta) = \det_{H^{m,s}} 1+T_E(\theta)$ définie sur $C^{\pm}$ ne s'annule qu'aux valeurs propres de H et la fonction $\operatorname{Arg} D_E(\theta)$ définie sur $C^{\pm}$ admet un prolongement continu sur $\overline{C^{\pm}_*}$ privé des valeurs propres de H. En particulier, la fonction $\xi_E((\mu-E)^{-e(n)}) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg} D_E(\mu-i0)$ est continue sur $\mathbb{R}^+_*$.

THEOREME III.1. - <u>Pour</u> $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$, <u>on a presque partout</u>

$$\text{(3.5)}\qquad \det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)$$
$$= \frac{\det_p[1+q_1R_0(\lambda-i0)q_2]}{\det_p[1+q_1R_0(\lambda+i0)q_2]} \exp \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \mathrm{Tr}\{[q_1R_0(\lambda-i0)q_2]^\ell - [q_1R_0(\lambda+i0)q_2]^\ell\}$$

<u>où</u> q_1 <u>et</u> q_2 <u>sont deux fonctions</u> C_0^∞ <u>telles que</u> $q_1q_2 = q$ <u>et</u> p <u>un entier supérieur à</u> $\frac{n}{2}$.

Rappelons la définition des déterminants d'ordre p (p entier) : si T est un opérateur compact de classe $\mathfrak{J}_p(\mathfrak{H})$, l'opérateur $(1+T)\exp \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^\ell \frac{T^\ell}{\ell}$ est une perturbation à trace de l'identité et on pose

$$\text{(3.6)}\qquad \det_p[1+T] = \det[(1+T)\exp \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^\ell \frac{T^\ell}{\ell}] \quad . \quad ([SI]).$$

Si, de plus, la série $\sum_{\ell=p}^{\infty} \|T^\ell\|_1$ converge, on a

$$\text{(3.7)}\qquad \det_p[1+T] = \exp \sum_{\ell=p}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \mathrm{Tr}\frac{T^\ell}{\ell} \ .$$

D'après le principe d'invariance de Birman-Kato (II.3) on a, pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, presque partout, $\mathcal{S}((\lambda-E)^{-e(n)}, R_0(E)^{e(n)}, R(E)^{e(n)}) \simeq \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)^{-1}$ et d'après le théorème II.2, on a

$$\mathcal{S}_E((\lambda-E)^{-e(n)}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{D_E(\lambda+i\epsilon)}{D_E(\lambda-i\epsilon)} \ .$$

Il en résulte

$$\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H) = \frac{D_E(\lambda-i0)}{D_E(\lambda+i0)} \ .$$

Vu que $D_E(\lambda \pm i0) = \det_{H^2,s}[\Sigma(E,\lambda)]R(E)[1+qR_0(\lambda \pm i0)][H_0-E][\Sigma_0(E,\lambda)]^{-1}$, on a
$\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H) = \det_{H^{0,s}}[1+qR_0(\lambda-i0)][1+qR_0(\lambda+i0)]^{-1}$ $(s > \frac{1}{2})$.

L'injection $H^2_{\text{supp } q} \hookrightarrow H^{0,s}$ $(s>0)$ étant de classe $\mathfrak{J}_{\frac{n}{2}+}(H^2_{\text{supp } q}, H^{0,s})$ (lemme III.2), $qR_0(\lambda \pm i0)$ est de classe $\mathfrak{J}_{\frac{n}{2}+}(H^{0,s})$. D'autre part, l'opérateur $R_0(\lambda+i0) - R_0(\lambda-i0)$ ayant pour noyau $\frac{i}{4\pi}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\right)^{n-2} \int_{S^{n-1}} e^{i\sqrt{\lambda}\langle x-y,\omega\rangle} d\omega$ ([A.S]p.305)

O.K

$q[R_0(\lambda+i0)-R_0(\lambda-i0)]$ est, si $s>n$, un opérateur régularisant dans $H^{0,s}$ et donc de classe $\mathfrak{J}_1(H^{0,s})$. Admettons pour l'instant le

LEMME III.4. - Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable et A, B des opérateurs de classe $\mathfrak{J}_p(\mathfrak{H})$ dont la différence est à trace. Si $1+B$ est inversible

$$\det[(1+B)^{-1}(1+A)] = \frac{\det_p[1+A]}{\det_p[1+B]} \exp \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \operatorname{Tr}\{A^\ell - B^\ell\}$$

$\mathcal{E}_p(B) = \exp \sum (-1)^\ell \frac{B^\ell}{\ell}$

$1+B = (1+B)\mathcal{E}_p(B)\mathcal{E}_p(B)$

qui nous donne pour $p > \frac{n}{2}$ et $s>n$

$$\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H) = \frac{\det_{p,H^{0,s}}[1+qR_0(\lambda-i0)]}{\det_{p,H^{0,s}}[1+qR_0(\lambda+i0)]} \exp \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \operatorname{Tr}_{H^{0,s}}\{[qR_0(\lambda-i0)]^\ell - [qR_0(\lambda+i0)]^\ell\}$$

et la proposition résulte alors de la factorisation de l'opérateur de multiplication par q de $\mathcal{B}(0,-s;0,s)$ en le produit de l'opérateur de $\mathcal{B}(0,-s;0,0)$ de multiplication par q_2 par l'opérateur de $\mathcal{B}(0,0;0,s)$ de multiplication par q_1.

$\det (1+B)^{-1}(1+A) = \det (1+B)^{-1}\mathcal{E}_p(B)^{-1}(1+A)\mathcal{E}_p(A)\,\mathcal{E}_p(A)^{-1}\mathcal{E}_p(B) = \frac{\det(1+A)\mathcal{E}_p(A)}{\det(1+B)\mathcal{E}_p(B)} \det \mathcal{E}_p(A)\ldots$

Démonstration du lemme III.4. - Pour A et B de rang fini, c'est clair d'après la définition (3.6) des déterminants d'ordre p. Soit (P_i) une suite de projecteurs de rang fini convergeant fortement vers l'identité. Alors les opérateurs P_iA, P_iB, resp. $P_i(B-A)$ convergent vers A, B, resp. $B-A$ dans $\mathfrak{J}_p(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{J}_p(\mathfrak{H})$, resp. $\mathfrak{J}_1(\mathfrak{H})$ ([SI]) et l'opérateur $(1+P_iB)^{-1}(1+P_iA)-1 = (1+P_iB)^{-1}P_i(A-B)$, défini pour i suffisamment grand, converge vers $(1+B)^{-1}(A-B) = (1+B)^{-1}(1+A)-1$ dans $\mathfrak{J}_1(\mathfrak{H})$. L'opérateur $(P_iA)^\ell - (P_iB)^\ell$ est un polynôme non commutatif en P_iA, P_iB et $P_i(B-A)$ de valuation au moins 1 pour $P_i(A-B)$, on voit ainsi que $(P_iA)^\ell - (P_iB)^\ell$ converge en norme vers $A^\ell - B^\ell$ dans $\mathfrak{J}_1(\mathfrak{H})$. Le lemme, pour des A et B qui ne sont pas nécessairement de rang fini, en résulte alors via un argument de continuité.

$\exp \operatorname{Tr}$

Remarque III.1. - Dans le cas de la dimension $n=1$, on a vu

$$\det \mathcal{S}(\lambda) = \frac{t(\sqrt{\lambda})}{\overline{t(\sqrt{\lambda})}}$$

. On a d'autre part

$$t(\sqrt{\lambda})^{-1} = \det[1+q_1R_0(\lambda+i0)q_2] \qquad \text{([SI, p. 75])}.$$

Remarque III.2. - Dans le cas de la dimension $n = 3$, l'expression (3.5) a été démontrée par Newton ([N]).

THEOREME III.2. -

a) $\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)$ est analytique sur $\mathbb{R}_*^+$

b) $\xi_E(\lambda)$ est analytique sur $\mathring{\sigma}_{ac,E} =]0, (-E)^{-e(n)}[$.

Remarquons que, pour un opérateur de classe $\mathfrak{J}_{2q}(\mathfrak{H})$, (q entier), sa norme $\|A\|_{2q}$ coïncide avec la norme Hilbert-Schmidt de l'opérateur $A_q = AA^*AA^*\ldots$ (q facteurs). En particulier si $\mathfrak{H} = L^2(X, d\sigma)$ et si A_q a pour noyau $A_q(x, y)$, on a

$$\|A\|_{2q} = \int_{X\times X} |A_q(x,y)|^2 d\sigma(x) d\sigma(y) .$$

Prenons p entier pair dans (3.5). Pour $n > 1$, l'opérateur $R_0(\lambda + i0)$ ayant pour noyau $\frac{i}{4}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^1_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}|x-y|)$ où H^1_ν désigne la première fonction de Hankel d'indice ν , $q_1R_0(\lambda+i0)q_2$ a pour noyau $\frac{i}{4}q_1(x)\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^1_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}|x-y|)q_2(y)$, ce qui permet d'évaluer la norme $\| \; \|_p$, et donne l'analycité, de la fonction $q_1R_0(\lambda+i0)q_2$ à valeurs opérateurs dans $\mathfrak{J}_p(L^2)$; par suite les fonctions $\det_p[1+q_1R_0(\lambda\pm i0)q_2]$ sont analytiques sur $\mathbb{R}_*^+$. En ce qui concerne l'analycité de

$$T_\ell(\sqrt{\lambda}) = \mathrm{Tr}\{[q_1R_0(\lambda+i0)q_2]^\ell - [q_1R_0(\lambda-i0)q_2]^\ell\} \qquad (\ell = 1, \ldots, p-1) ,$$

elle résulte aussitôt des expressions établies dans la section IV.1, (1.4) pour $\ell = 1$ et (1.6) sinon (la formule (1.6) est valable pour toute dimension n distincte de 1 , bien que ce qui suit IV. (1.6) soit spécifique aux dimensions impaires). On en déduit l'analycité de $\det \mathcal{S}(\lambda)$ sur $\mathbb{R}_*^+$ en toute dimension, puisque la dimension 1 a déjà été abordée dans la partie I.

La fonction ξ_E , continue sur $\overset{\circ}{\sigma}_{ac,E}$ et vérifiant $\det \mathfrak{s}(\lambda, H_0, H) = e^{-2i\pi\xi_E((\lambda-E)^{-e(n)})}$ d'après le théorème II.2 et le principe d'invariance, est donc analytique sur $\overset{\circ}{\sigma}_{ac,E}$.

3.2. ξ_E à l'extrémité $(-E)^{-e(n)}$ de $\sigma_{ac,E}$.

THEOREME III.3. - Pour $n = 3$ ou $n \geq 5$, $\xi_E((-E)^{-e(n)}-) - \xi_E((-E)^{-e(n)}+) = \nu(0,H) + \varepsilon$ où $\nu(0,H)$ est la multiplicité de la valeur propre zéro de H et $\varepsilon = 0$ sauf lorsqu'il y a résonance, auquel cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Utilisant la factorisation (3.3) et les résultats rappelés en 2.2.1, nous obtenons de suite l'existence d'un développement asymptotique pour l'opérateur $T_E(\theta)$ dans $\mathfrak{I}_1(H^{1,s})$ au voisinage de $\theta = 0$ pour $\theta \in \overline{\mathbb{C}_*^+}$. La factorisation (3.4) nous assure à nouveau de l'existence d'un développement asymptotique dans $\mathcal{B}(H^{1,s})$ pour l'opérateur $1 + T_E(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ pour $\theta \in \overline{\mathbb{C}_*^+}$. En fait, par unicité, le développement ainsi obtenu pour $T_E(\theta)$ fournit les coefficients du développement de $T_E(\theta)$ dans l'espace $\mathfrak{I}_1(H^{1,s})$.

Introduisons :

- l'opérateur inversible $U_E(\theta) = \Sigma(E,\theta)R(E)$ de $\mathcal{B}(-1,s;1,s)$,
- l'opérateur $\tilde{T}_E(\theta) = U_E(\theta)^{-1}T_E(\theta)U_E(\theta)$ de $H^{-1,s}$
- l'opérateur $Q^*(\theta) = Q_0^* - iQ_1^*\theta^{-\frac{1}{2}} - Q_2^*\theta^{-1}$ de $H^{-1,s}$
- et l'opérateur $\tilde{\tilde{T}}_E(\theta) = Q^*(\theta)[1+\tilde{T}_E(\theta)] - 1$ de $H^{-1,s}$.

Les opérateurs $\tilde{T}_E(\theta)$ et $\tilde{\tilde{T}}_E(\theta)$ admettent un développement asymptotique dans $\mathfrak{I}_1(H^{-1,s})$ dont les coefficients sont calculables à partir de la factorisation (3.4). Utilisant les résultats (2.2) de Jensen-Kato, nous obtenons au voisinage de $\theta = 0$, $\theta \in \overline{\mathbb{C}_*^+}$,

$$Q^*(\theta)[1+qR_0(\theta)] = Q_0^*(1+qG_0) + Q_1^*qG_1 + Q_2^*qG_2 + o(1) \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}(H^{-1,s})$$

$+ Q_2^* q G_1 \theta^{-1/2}$ $(n=3)$

ce qui donne

$G_1 q G_2 = 0$!

o.k.

$$1+\tilde{\tilde{T}}_E(\theta) = [Q_0^*(1+qG_0)+Q_1^*\,qG_1+Q_2^*\,qG_2]\,[\Sigma_0(E,0)]^{-1}[1+qR_0(E)]^{-1}\Sigma(E,0)+o(1)$$

dans l'idéal affine $1+\mathfrak{I}_1(H^{-1,s})$. "$o(1)$" = $f(\theta)$ $\|f(\theta)\|_1 = o(1)$

Admettons un instant le

LEMME III.5. - <u>L'opérateur</u> $Q_0^*(1+qG_0)+Q_1^*\,qG_1+Q_2^*qG_2$ <u>de</u> $H^{-1,s}$ <u>est inversible</u>.

Alors il en est de même pour $1+\tilde{\tilde{T}}_E(0)$ et on a

$$\det_{H^{-1,s}}[1+\tilde{\tilde{T}}_E(\theta)] \sim \det_{H^{-1,s}}[1+\tilde{\tilde{T}}_E(0)] \quad \text{lorsque} \quad \theta\to 0\ ,\quad \theta\in\overline{\mathbb{C}_*^+}\ .$$

Or, on a :

$$\det_{H^{-1,s}}[1+\tilde{\tilde{T}}_E(\theta)] = \det_{H^{-1,s}}Q^*(\theta)\det_{H^{-1,s}}[1+\tilde{T}_E(\theta)]$$

$$\det_{H^{-1,s}}Q^*(\theta) = (-1)^{\nu(0,H)+\varepsilon}\,\theta^{-\nu(0,H)-\varepsilon}$$

et
$$\det_{H^{-1,s}}[1+\tilde{T}_E(\theta)] = \det_{H^{1,s}}[1+T_E(\theta)] = D_E(\theta)$$

donc, si on note $\delta_E=(-1)^{\nu(0,H)+\varepsilon}\det[1+\tilde{\tilde{T}}_E(0)]$, nous obtenons $D_E(\theta)\sim\delta_E\theta^{\nu(0,H)+\varepsilon}$ lorsque $\theta\to 0$ avec $\theta\in\overline{\mathbb{C}_*^+}$, ce qui, combiné avec (3.1), donne immédiatement le théorème.

<u>Démonstration du lemme III.5.</u> - Il suffit de démontrer que son adjoint $(1+G_0q)Q_0+G_1qQ_1+G_2qQ_2$, opérateur de $H^{1,-s}$ est injectif, puisque cet opérateur est une perturbation compacte de l'identité. Soit donc $u\in H^{1,-s}$ tel que $(1+G_0q)Q_0u+G_1qQ_1u+G_2qQ_2u=0$. Multipliant à gauche par Q_i^*q (i=1 ou 2) et utilisant les relations de nullité (2.2.2) nous obtenons $Q_i^*qG_iqQ_iu=0$ (i=1,2) et, d'après (2.2.2) toujours, $Q_iu=0$ (i=1,2) . Alors $(1+G_0q)Q_0u=0$ ce qui entraîne $Q_0u=0$ soit finalement $u=0$.

<u>Remarque III.3.</u> - Notons $\det\mathcal{S}(0)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\det\mathcal{S}(\lambda)$. Alors, vu $\det\mathcal{S}(\lambda)=e^{2i\pi\xi_E((\lambda-E)-e(n))}$ on a $\det\mathcal{S}(0)=(-1)^{2\varepsilon}$, qu'on écrit $\varepsilon=\dfrac{\mathrm{Log}\det\mathcal{S}(0)}{2i\pi}$ avec la convention de la remarque (I.2).

4. La formule de trace.

THEOREME III.4. - Soit $n = 3$ ou $n \geq 5$. Soit H_0 (resp. $H = H_0 + q$) l'opérateur de Schrödinger libre (resp. dans le champ de potentiel q) dans $\mathbb{R}^n$. Soit Φ une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$. Alors $\Phi(H) - \Phi(H_0)$ est un opérateur à trace et si (λ_j) désigne la suite des valeurs propres de H, répétées selon leur multiplicité, on a la formule de trace.

$$\text{(4.1)} \quad \mathrm{Tr}\{\Phi(H) - \Phi(H_0)\} = \sum_j \Phi(\lambda_j) + \frac{\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(0, H_0, H)}{2i\pi}\Phi(0) + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty} \Phi(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)\,d\lambda .$$

Soit Φ une fonction de Schwartz.

Soit E réel négatif minorant le spectre de H et θ_E une fonction C^∞ à support compact valant 1 au voisinage du spectre de $R(E)^{e(n)}$. La fonction $\psi_E(\lambda) = \chi_{\mathbb{R}^+}(\lambda)\Phi(E + \lambda^{-e(n)^{-1}})\theta_E(\lambda)$ est C^∞ à support compact et on a

$$\Psi_E(R_0(E)^{e(n)}) = \Phi(H_0) \quad \text{et} \quad \Psi_E(R(E)^{e(n)}) = \Phi(H) .$$

Ainsi, d'après le théorème II.1, l'opérateur $\Phi(H) - \Phi(H_0)$ est à trace et on a $\mathrm{Tr}\{\Phi(H_0) - \Phi(H)\} = \langle \xi_E , \frac{d\Psi_E}{d\lambda} \rangle$.

La fonction spectrale de perturbation $\xi_E(\lambda) = \xi(\lambda, R_0(E)^{e(n)}, R(E)^{e(n)})$ a, d'après les résultats précédents, pour dérivée sur $\mathbb{R}^*$

$$-\sum_j \delta(\lambda - (\lambda_j - E)^{-e(n)}) - \frac{\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}\delta(\lambda - (-E)^{-e(n)}) - \chi_{\sigma_{ac,E}}(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Log}\det \mathcal{S}_E(\lambda) .$$

La fonction ψ_E étant plate à l'origine, on obtient donc

$$\text{(4.2)} \quad \mathrm{Tr}\{\Phi(H) - \Phi(H_0)\} = \sum_j \Phi(\lambda_j) + \frac{\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}\Phi(0) + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{(-E)^{-e(n)}} \Phi\left(E + \lambda^{-e(n)^{-1}}\right)\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Log}\det \mathcal{S}_E(\lambda)\,d\lambda$$

et la formule de trace (4.1) après avoir utilisé l'invariance de Birman-Kato $\det \mathcal{S}_E((\lambda - E)^{-e(n)}) = [\det \mathcal{S}(\lambda)]^{-1}$ et effectué le changement de variable $\lambda = (\mu - E)^{-e(n)}$ dans le terme intégral de (4.2).

Remarque III.4. - La formule de trace a été démontrée en dimension 1 (Théorème I.4). Pour les dimensions 2 et 4, nous avons la formule de trace avant intégration par parties

$$\mathrm{Tr}\{\Phi(H)-\Phi(H_0)\} = \sum_j \Phi(\lambda_j) + K\Phi(0) - \frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty} \Phi'(\lambda)\,\mathrm{Log}\,\det S(\lambda)\,d\lambda$$

où l'entier K sera précisé par la nature de la singularité de ξ_E au point $(-E)^{-e(n)}$ (donnée vraisemblablement par les résultats, annoncés, de Jensen concernant les résolvantes au voisinage de l'origine).

IV. - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE.

1. Existence du développement asymptotique.

THEOREME IV.1. - Si n est impair, Log det $\mathcal{S}(\lambda, H_0, H)$ admet un développement asymptotique, dérivable à tout ordre, en puissances de $\sqrt{\lambda}$ lorsque $\lambda \to \infty$.

Le cas de la dimension $n = 1$ a été traité dans la partie I. Pour les autres dimensions, nous allons utiliser l'expression

III. (3.5)

$$\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H) = \frac{\det_p [1+q_1R_0(\lambda-i0)q_2]}{\det_p [1+q_1R_0(\lambda+i0)q_2]} \exp \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^{\ell+1} \frac{\mathrm{Tr}\{[q_1R_0(\lambda-i0)q_2]^{\ell}-[q_1R_0(\lambda+i0)q_2]^{\ell}\}}{\ell}$$

où nous prenons $p = \frac{n+1}{2}$ et on a $q = q_1q_2$.

1.1. Etude de $D_p(k) = \det_p[1+q_1R_0(k^2+i0)q_2]$.

Rappelons l'estimation établie par Agmon ([A] Remarque 2, p. 203) : soit $s > \frac{1}{2}$ et $\delta > 0$. Il existe une constante $C = C_{s,\delta}$ telle que

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} (|z|+1)^{(1-|\alpha|)/2} \|D^{\alpha}u\|_{0,-s} \leq C\|(H_0-z)u\|_{0,s}$$

pour tout u de $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et tout complexe z tel que $|z| \geq \delta$.

Il en résulte lorsque $k \to +\infty$

$$\|R_0(k^2+i0)\|_{\mathcal{B}(0,s\,;\,0,-s)} = O(k^{-1}) \quad \text{et} \quad \|R_0(k^2+i0)\|_{\mathcal{B}(0,s\,;\,2,-s)} = O(k)$$

pour $s > \frac{1}{2}$, puis

$$\|q_1 R_0(k^2+i0)q_2\|_{\mathcal{B}(L^2)} = O(k^{-1}) \quad \text{et} \quad \|q_1 R_0(k^2+i0)q_2\|_{\mathfrak{I}_p(L^2)} = O(k)$$

où, pour la deuxième majoration, on a utilisé le fait que l'injection de $H^2_{\mathrm{Supp}\, q_1}$ dans L^2 est de classe $\mathfrak{I}_p\left(H^2_{\mathrm{Supp}\, q_1}, L^2\right)$. Utilisant la nature höldérienne des idéaux $\mathfrak{I}_p$, nous obtenons pour $\ell \geq p$

$$\|[q_1 R_0(k^2+i0)q_2]^\ell\|_{\mathfrak{I}_1(L^2)} \leq \|q_1 R_0(k^2+i0)q_2\|^{\ell-p}_{\mathcal{B}(L^2)} \|q_1 R_0(k^2+i0)q_2\|^p_{\mathfrak{I}_p(L^2)}$$

et les majorations précédentes nous donnent

$$\text{(1.1)} \qquad \|[q_1 R_0(k^2+i0)q_2]^\ell\|_{\mathfrak{I}_1(L^2)} = O(k^{2p-\ell}) \; .$$

On a donc, d'après l'expression III (3.7), le développement en série valable pour k assez grand

$$\text{(1.2)} \qquad \mathrm{Log}\, D_p(k) = \sum_{\ell=p}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\mathrm{Tr}[q_1 R_0(k^2+i0)q_2]^\ell}{\ell}$$

et grâce à (1.1), il suffit de démontrer que chaque terme $\mathrm{Tr}[q_1 R_0(k^2+i0)q_2]^\ell$ a un développement asymptotique lorsque $k \to +\infty$ pour qu'il en soit de même pour $\mathrm{Log}\, D_p(k)$.

L'opérateur $R_0(k^2+i0)$ a pour noyau $\frac{i}{4}\left(\frac{k}{2\pi|x-y|}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^1_{\frac{n}{2}-1}(k|x-y|)$. On en tire

$$\mathrm{Tr}[q_1 R_0(k^2+i0)q_2]^\ell = \int_{(\mathbb{R}^n)^\ell} \prod_{j\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \frac{i}{4}\left(\frac{k}{2\pi|x_{j+1}-x_j|}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^1_{\frac{n}{2}-1}(k|x_{j+1}-x_j|)q(x_j)dx_j \ldots dx_\ell$$

soit, en utilisant la représentation intégrale

$$H^1_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i(z-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{+\infty} e^{-u}[u(1+\frac{iu}{2z})]^{\nu-\frac{1}{2}} du \qquad \text{([W, p.196])},$$

la formule de représentation intégrale n'est pas valable

$$\mathrm{Tr}[q_1R_0(k^2+i0)q_2]^{\ell} = C(n)^{-\ell}\int_{(\mathbb{R}^n)^{\ell}} \prod_{j\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \frac{q(x_j)}{|x_{j+1}-x_j|^{n-2}}\, e^{ik|x_{j+1}-x_j|}\, I(k|x_{j+1}-x_j|)\,dx_1\ldots dx_{\ell}$$

où on a posé

$$C(n) = \pi^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{n-1}\,\Gamma\!\left(\frac{n-1}{2}\right) e^{i\pi\frac{3-n}{4}} \quad \text{et} \quad I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u}[u(2a+iu)]^{\frac{n-3}{2}}\,du\ .$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + r\omega_1 \\ x_3 = x_2 + r\omega_2 \\ \quad\vdots \\ x_{\ell} = x_{\ell-1} + r\omega_{\ell-1} \end{cases}$$

où r est positif et (ω_i) appartient à $\Sigma(\ell,n) = \{(\omega_i)\in(\mathbb{R}^n)^{\ell-1},\ |\omega_1|+|\omega_2|+\ldots+|\omega_{\ell-1}|+|\omega_1+\ldots+\omega_{\ell-1}|=1\}$ portant la mesure $d\sigma$ induite par la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n)^{\ell-1}$.

cf Federer
Bourbaki

Nous obtenons ainsi

$$(1.3) \qquad \mathrm{Tr}[q_1R_0(k^2+i0)q_2]^{\ell} = C(n)^{-\ell}\int_{\mathbb{R}^n} q(x_1)\Big\{\int_0^{\infty} e^{ikr}\,\Phi_{k,\ell,x_1}(r)\,dr\Big\}dx_1$$

où on a posé

$$\Phi_{k,\ell,x_1}(r) = r^{2\ell-n-1}\int_{\Sigma(\ell,n)} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{q_j(x_1,(\omega),r)}{|\omega_j|^{n-2}}\, I(k|\omega_j|\,r)\,d\sigma(\omega)$$

avec les notations $\omega_{\ell} = \omega_1+\ldots+\omega_{\ell-1}$, $q_j(x_1,(\omega),r) = q(x_1+r(\omega_1+\ldots+\omega_j))$ pour $j = 1,\ldots,\ell-1$ et $q_{\ell}(x_1,(\omega),r) = 1$.

La dimension n étant impaire, la fonction $\Phi_{k,\ell,x_1}(r)$ est un polynôme en k dont les coefficients sont des fonctions de r à support compact $S_{x_1,\ell}$ uniforme par rapport à x_1 décrivant le support de q (i.e. $S_{x_1,\ell}$ est inclus dans un compact fixe S_{ℓ}) qui sont de classe C^{∞} (par dérivation sous les intégrales, dérivations justifiées par le lemme IV.1 démontré infra). Alors, par un procédé classique d'intégrations par parties dans (1.3), on en déduit que $\mathrm{Tr}[q_1R_0(k^2+i0)q_2]^{\ell}$ possède un développement asymptotique lorsque $k\to\infty$.

LEMME IV.1. - <u>L'intégrale</u> $\int_{\Sigma(\ell,n)} \frac{d\sigma(\omega)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell}|\omega_\alpha|^{n-2}}$ <u>est finie</u>.

Les ensembles $\Sigma_j(\ell,n) = \{(\omega_i)\in\Sigma(\ell,n)\ ,\ |\omega_j|\geq\frac{1}{\ell}\}$, $j=1,\ldots,\ell$ recouvrent $\Sigma(\ell,n)$ et on a, si

$$A(j) = \int_{\Sigma(\ell,n)} \frac{|\omega_j|^{n-2}}{\prod_{\alpha=1}^{\ell}|\omega_\alpha|^{n-2}}\, d\sigma(\omega)\ ,$$

$$\int_{\Sigma_j(\ell,n)} \frac{d\sigma(\omega)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell}|\omega_\alpha|^{n-2}} \leq \ell^{n-2}A(j)\ .$$

Il suffit donc de montrer que l'intégrale $A(j)$ est finie. Notant $K(\ell,n) = \{(x_i)\in(\mathbb{R}^n)^{\ell-1}\ ,\ |x_1|+\ldots+|x_{\ell-1}|+|x_1+\ldots+x_{\ell-1}|\leq 1\}$ nous avons d'une part

$$\int_{K(\ell,n)} \frac{|x_j|^{n-2}}{\prod_{\alpha=1}^{\ell}|x_\alpha|^{n-2}}\, dx_1\ldots dx_{\ell-1} = \int_0^1 A(j)r^{2(\ell-1)-1}dr = \frac{A(j)}{2(\ell-1)}$$

et d'autre part, utilisant les coordonnées polaires dans $(\mathbb{R}^n)^{\ell-1}$ et le changement de variables $y_1 = x_1,\ldots,y_{j-1} = x_{j-1}$, $y_j = x_{j+1},\ldots,y_{\ell-1} = x_\ell$,

$$\int_{K(\ell,n)} \frac{|x_j|^{n-2}}{\prod_{\alpha=1}^{\ell}|x_\alpha|^{n-2}}\, dx_1\ldots dx_{\ell-1}$$

$$\leq \int_{\{\sum_{\alpha=1}^{\ell-1}|y_\alpha|\leq 1\}} \frac{dy_1\ldots dy_{\ell-1}}{\prod_{\alpha=1}^{\ell-1}|y_\alpha|^{n-2}} = |S^{n-1}|^{\ell-1}\int_{\{\sum_{\alpha=1}^{\ell-1}r_\alpha\leq 1\ ,\ r_\alpha\geq 0\}} \prod_{\alpha=1}^{\ell-1} r_\alpha\, dr_1\ldots dr_{\ell-1}\ .$$

Le lemme en résulte.

<u>Remarque IV.1.</u> - Vu la relation $\overline{C(n)^{-\ell}\Phi_{k,\ell,x_1}(r)} = C(n)^{-\ell}\Phi_{k,\ell,x_1}(-r)$, nous avons

$$\mathrm{Log}|D_p(k)| = \sum_{\ell=p}^{\infty} \frac{(-C(n))^{-\ell}}{2\ell}\int_{\mathbb{R}^n} q(x_1)\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikr}\Phi_{k,\ell,x_1}(r)dr\}dx_1\ .$$

Chaque terme de cette somme est à décroissance rapide, et grâce à la majoration (1.1), il en est de même pour $\mathrm{Log}|D_p(k)|$.

1.2. Etude de $T_\ell(k) = \mathrm{Tr}\{[q_1 R_0(k^2+i0)q_2]^\ell - [q_1 R_0(k^2-i0)q_2]^\ell\}$.

L'opérateur $R_0(k^2+i0) - R_0(k^2-i0)$ a pour noyau

$\frac{i}{4\pi}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-2}\int_{S^{n-1}} e^{ik\langle x-y,\omega\rangle} d\omega$ ([A.S], p.305).

On en déduit immédiatement :

$$T_1(k) = \frac{i}{4\pi}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-2} |S^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^n} q(x)dx \ . \tag{1.4}$$

Pour $\ell \geq 2$, nous avons, avec les notations précédentes,

$$T_\ell(k) = C(n)^{-\ell}\int_{\mathbb{R}^n} q(x_1)\{\int_0^\infty [e^{ikr}\Phi_{k,\ell,x_1}(r) - e^{-ikr}\Phi_{k,\ell,x_1}(-r)]\, r^{2\ell-n-1} dr\}dx_1 \tag{1.5}$$

que nous écrirons

(1.6)

$$T_\ell(k) = C(n)^{-\ell}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Sigma(\ell,n)} q(x_1)\{\int_0^{+\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{q(x_1+r(\omega_1+\ldots+\omega_j))}{|\omega_j|^{n-2}} F_{\ell,\omega}(k,r)\, r^{2\ell-n-1} dr\} d\sigma(\omega) dx_1$$

en ayant introduit

$$F_{\ell,\omega}(k,r) = e^{ikr}\prod_{j=1}^{\ell} I(k|\omega_j|r) - e^{-ikr}\prod_{j=1}^{\ell} I(-k|\omega_j|r) \ . \tag{1.7}$$

Admettons pour le moment les lemmes suivants.

LEMME IV.2. - <u>La fonction</u> $F_{\ell,\omega}$ <u>s'annule en</u> $r = 0$ <u>au moins jusqu'à l'ordre</u> $n-2$.

LEMME IV. 3. - <u>Soient</u> P <u>et</u> Q <u>des polynômes à deux variables tels que</u> $e^{ikr}P(k,r) + e^{-ikr}Q(k,r)$ <u>ait à l'origine</u> $r = 0$ <u>un zéro d'ordre au moins</u> α . <u>Soit</u> θ <u>une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> $\mathbb{R}^+$ <u>à décroissance rapide ainsi que ses dérivées lorsque</u> $r \to +\infty$. <u>Alors l'intégrale</u>

$$I_\alpha(k) = \int_0^\infty \frac{e^{ikr}P(k,r) + e^{-ikr}Q(k,r)}{r^\alpha}\theta(r)dr$$

<u>a un développement</u> asymptotique en puissances de <u>k</u> <u>lorsque</u> $k \to +\infty$.

Ainsi d'après le lemme IV.2, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{q(x_1 + r(\omega_1 + \dots + \omega_j))}{|\omega_j|^{n-2}} F_{\ell,\omega}(k,r) r^{2\ell-n-1} dr$$

est de type $I_{2\ell-n-1}$ puisque, ayant supposé $\ell \geq 2$, nous avons $n-2 \geq n+1-2\ell$. Le développement asymptotique obtenu, via le lemme IV.3, est uniforme par rapport à (ω) et x_1 dans le support de q_1 . Intégrant ce développement dans (1.6), nous obtenons l'existence du développement pour $T_\ell(k)$.

Démonstration du lemme IV.2. - En intégrant $e^{-z}(z^2+a^2)^{\frac{n-3}{2}}$ sur le contour $]-ia+\infty, -ia] \cup [-ia, ia] \cup [ia, ia+\infty[$, nous obtenons

$$e^{ia} I(a) = e^{-ia} I(-a) + i^{\frac{n-1}{2}} a^{n-2} \int_{-1}^{+1} e^{-iau} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du \ .$$

Le lemme en résulte, d'après la définition (1.7) de $F_{\ell,\omega}(k,r)$.

Démonstration du lemme IV.3. - Le cas $\alpha = 0$ résulte classiquement d'intégrations par parties. Pour $\alpha = 1$, une intégrale de type I_1 est la somme d'une intégrale de type I_0 et d'une intégrale, à un facteur Ck^j pres , de la forme $\int_0^\infty \frac{\sin kr}{r} \theta(r) dr$ qu'on écrit

$$\int_0^\infty \frac{\sin kr}{r} \theta(r) dr = \frac{\pi}{2} \theta(0) + \int_0^\infty \sin kr \frac{\theta(r) - \theta(0)}{r} dr \ .$$

En intégrant par parties l'intégrale de droite, on voit que $\int_0^\infty \frac{\sin kr}{r} \theta(r) dr$, et donc toute intégrale de type I_1 , a un développement asymptotique. Pour une intégrale de type I_α , on se ramène à une intégrale de type $I_{\alpha-1}$, et par un nombre fini de telles réductions à une intégrale de type I_1 , de la manière suivante : soit φ la fonction définie par $\varphi(r) = -r^{\alpha-1} \int_r^\infty \frac{\theta(u)}{u^\alpha} du = -\int_1^\infty \frac{\theta(ru)}{u^\alpha} du$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et à décroissance rapide ainsi que ses dérivées à l'infini ; alors, par une intégration par parties, nous obtenons

$$I_\alpha(k) = \int_0^\infty \frac{d}{dr} [e^{ikr} P(k,r) + e^{-ikr} Q(k,r)] \frac{\varphi(r)}{r^{\alpha-1}} dr \ ,$$

intégrale qui est de type $I_{\alpha-1}$.

1.3. Démonstration du théorème.

L'existence d'un développement asymptotique pour $\operatorname{Log} \det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)$

$\zeta R_0'(\zeta) = -2R_0(\zeta) + 2\{x\cdot\nabla, R_0(\zeta)\}$ $(= \zeta R_0^2(\zeta)$, pour $\mathrm{Im}\,\zeta > 0)$

résulte des deux sections précédentes et de la relation

$$\det_p[1+q_1R_0(\lambda-i0)q_2] = \overline{\det_p[1+q_1R_0(\lambda+i0)q_2]} \ .$$

En ce qui concerne la dérivabilité de ce développement, on reprend tout d'abord l'expression (1.2). Elle est dérivable terme à terme, et en dérivant chaque terme via la formule $\cancel{\frac{d}{dk}R_0(k^2+i0) = -2k[R_0(k^2+i0)]^2}$, on obtient une majoration analogue à (1.1) pour l'ensemble des termes de la série dérivée (pour chaque ordre de dérivation). D'après son expression (1.3), le développement de chaque terme de (1.2) est dérivable, on en déduit, de même qu'à l'ordre zéro, l'existence d'un développement pour chaque dérivée de $\mathrm{Log}\, D_p(k)$, ce qui implique la dérivabilité du développement de $\mathrm{Log}\det S(\lambda)$ puisque le développement des $T_\ell(k)$ $(\ell=1,\dots,p-1)$ est clairement dérivable d'après leur expression (1.4) et (1.6).

<u>Remarque IV.2.</u> - La fonction D_p définie sur $\mathbb{R}$ par $D_p(k) = \det_p[1+q_1R_0(k^2+i0)q_2]$ pour $k>0$ et $D_p(k) = \det_p[1+q_1R_0(k^2-i0)q_2]$ pour $k<0$ est la valeur au bord de la fonction $D_p(z) = \det_p[1+qR_0(z^2)]$ holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ dont les zéros (avec multiplicité) sont les complexes $i\sqrt{-\lambda_j}$ où (λ_j) note la suite des valeurs propres de H. Les fonctions $D_p(z)$ et $\prod_j \frac{z-i\sqrt{-\lambda_j}}{z+i\sqrt{-\lambda_j}} \exp\left(-\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}|D_p(t)|}{z-t}dt\right)$ ayant les mêmes zéros avec ordre identique dans $\mathbb{C}^+$ et même module sur la droite réelle et à l'infini sont, d'après une utilisation simple du principe du maximum, égales. La décroissance rapide de $D_p(k)$ lorsque $k \to +\infty$ (Remarque IV.1) permet de retrouver à partir de l'égalité

$$D_p(k) = \prod_j \frac{k-i\sqrt{-\lambda_j}}{k+i\sqrt{-\lambda_j}} \exp\left(-\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}|D_p(t)|}{k-t}dt\right)$$

$\mathrm{Log}|D_p(k)| = -\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}|D_p(t)|}{k-t}$

l'existence du développement asymptotique de $\mathrm{Log}\, D_p(k)$ et d'en préciser la forme

$$\mathrm{Log}\det_p[1+q_1R_0(\lambda+i0)q_2] \sim i\sum_{\ell=1}^{\infty} d_\ell \lambda^{-\ell+\frac{1}{2}}$$

avec $$d_\ell = \frac{(-1)^\ell}{\ell-\frac{1}{2}}\sum_j(-\lambda_j)^{\ell-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{2(\ell-1)}\mathrm{Log}|D_p(t)|dt \ .$$

Remarque IV.3. - Dans le cas des dimensions n paires, ce qui précède ne permet pas d'établir l'existence d'un développement asymptotique pour la phase de diffusion $s(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{Log} \det \mathcal{S}(\lambda)$. Cependant, d'après les estimations (1.1), $\operatorname{Log} D_p(\lambda+i0)$ est à croissance polynomiale et d'après l'expression de son noyau, l'opérateur $q_1[R_0(\lambda+i0)-R_0(\lambda-i0)]q_2$ est, en norme, à croissance polynomiale dans $\mathfrak{J}_1$, il en est par suite de même pour les $T_\ell(\sqrt{\lambda})$. La phase de diffusion $s(\lambda)$, ainsi que ses dérivées, est donc à croissance polynomiale à l'infini.

2. Calcul du développement asymptotique.

Utilisant la formule de trace pour l'opérateur de la chaleur,

$$\operatorname{Tr}\{e^{-tH}-e^{-tH_0}\} = \sum_j e^{-t\lambda_j} + \frac{\operatorname{Log} \det \mathcal{S}(0,H_0,H)}{2i\pi} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty e^{-t\lambda} \frac{d}{d\lambda} \operatorname{Log} \det \mathcal{S}(\lambda,H_0,H)\,d\lambda$$

nous allons pouvoir préciser la forme du développement asymptotique de $\operatorname{Log} \det \mathcal{S}(\lambda,H_0,H)$ (dimension n impaire) à partir du développement asymptotique de $Z(t) = \operatorname{Tr}\{e^{-tH}-e^{-tH_0}\}$ $(t\to 0^+)$ dont l'existence (en toute dimension) et la forme sont établies dans le théorème suivant, analogue de celui pour l'opérateur de la chaleur sur un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété compacte ([M.S]).

THEOREME IV.2. [CV] - Soit $e(t,x,y,H)$ $(t>0)$ le noyau de e^{-tH} . Alors, quand $t\to 0^+$, $e(t,x,x,H)$ admet un développement asymptotique de la forme $e(t,x,x,H) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^n(x)t^j$. Les $a_j^n(x)$ sont donnés par $a_0^n(x) = 1$ et $a_j^n(x) = P_j^n(q(x),Dq(x),\dots,D^\alpha q(x))$ où les polynômes P_j^n sont des polynômes universels en q et ses dérivées, invariants par l'action de $O(n)$ sur l'espace des jets et ont la propriété d'homogénéité

$$P_j^n\left(\lambda q, \lambda^{3/2} Dq, \dots, \lambda^{1+\frac{|\alpha|}{2}} D^\alpha q\right) = \lambda^j P_j^n(q, Dq, \dots, D^\alpha q) \ .$$

Ce développement peut s'intégrer terme à terme si bien que

$$Z(t) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n t^j \quad \text{avec} \quad a_j^n = \int_{\mathbb{R}^n} P_j^n(q, Dq, \dots, D^\alpha q)dx \ .$$

En dimension $n = 1$, les polynômes P_j^1 ont été bien étudiés, ils vérifient des relations de récurrence [M.M] et les a_i^1 constituent un ensemble complet d'intégrales premières pour l'équation de Korteweg de Vries $\frac{\partial q}{\partial t} = 6q\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}$ ([F.Z], [MC]). En dimension supérieure, mentionnons le calcul des P_j^n (n quelconque, $j=1,2,3$) par Gilkey ([GL]) qui fournit $a_1^n = -\int_{\mathbb{R}^n} q dx$, $a_2^n = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} q^2 dx$ et $a_3^n = -\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^n}(q^3 + \frac{1}{2}\|Dq\|^2)dx$ et le calcul des P_j^3 $(j=1,2,3,4)$ par Colin de Verdière ([C.V.]) qui donne
$a_4^3 = \frac{1}{24}\int_{\mathbb{R}^3}(q^4 + 2q\|Dq\|^2 + \frac{11}{5}|\Delta q|^2 - 2\|D^2 q\|^2)dx$.

Du théorème précédent et avec le

LEMME IV.4. [C.V] - Soit $f(\lambda)$ continue sur $[0, +\infty[$ admettant, lorsque $\lambda \to \infty$, un développement asymptotique de la forme $f(\lambda) \sim \Sigma f_j \lambda^{\mu_j}$ avec $\mu_1 > \mu_2 > \dots$ et $F(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\lambda)d\lambda$ $(t>0)$. Alors $F(t)$ admet, lorsque $t \to 0^+$, un développement asymptotique de la forme

$$F(t) \sim \Sigma'\Gamma(\mu_j+1)f_j t^{-\mu_j-1} + \operatorname{Log} t\, \Sigma'' \frac{(-1)^{\mu_j}}{\Gamma(-\mu_j)} f_j t^{-\mu_j-1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} F_\ell t^\ell$$

où Σ' est la somme pour $\mu_j \notin \{-1, -2, \dots\}$ et Σ'' la somme pour $\mu_j \in \{-1,-2,-3,\dots\}$. Les F_ℓ ne sont pas déterminés par les f_j ;

nous obtenons immédiatement le

THEOREME IV.3. - Soit n impair. Alors le développement asymptotique de $s(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda, H_0, H)$ est de la forme

$$s(\lambda) - s(0) \sim \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{[\frac{n}{2}]} s_\ell^n \lambda^{-\ell} - N - \frac{\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi} - \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} s_\ell^n \lambda^{-\ell}$$

lorsque $\lambda \to \infty$ avec $s_\ell^n = \dfrac{a_\ell^n}{\Gamma(\frac{n}{2} - \ell + 1)}$.

Dans le cas de la dimension 1 , utilisant les remarques III. 1 et IV. 2, nous obtenons, avec les notations de la partie I,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\ell)}\, a^1_\ell = \frac{4(-1)^{\ell+1}}{2\ell-1} \sum_j (-\lambda_j)^{\ell-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{2(\ell-1)} \mathrm{Log}(1-|r_1(t)|^2)dt$$

$2\mathrm{Log}\,|t_1(\lambda)|$

ce qui fournit les inégalités, puisque $|r_1(t)| \leq 1$, $|t_1| \leq 0$

$$(-1)^\ell \left[\frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell-1)!}\, a^1_\ell - \sum_j (-\lambda_j)^{\ell-\frac{1}{2}}\right] \geq 0 \quad \text{pour} \quad \ell \geq 1 .$$

Ces inégalités semblent particulières à la dimension $n = 1$ (cf. [CV] pour l'étude de la dimension $n = 3$).

3. Fonction zêta.

Soit E réel dans $\rho(H)$. Soit, pour s complexe vérifiant $\mathrm{Re}\, s > 0$, $\Phi_{n,s}$ une fonction valant $\lambda^{s/e(n)}$ au voisinage du spectre de $R(E)^{e(n)}$, C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et à support borné. (On a $\lambda^{s/e(n)} = e^{\frac{s}{e(n)}\mathrm{Log}\,\lambda}$ où on prend la détermination principale du Log sur $\mathbb{R}^+_*$ et une détermination quelconque sur $\mathbb{R}^-_*$). Pour $\mathrm{Re}\, s > 3e(n)$, la transformée de Fourier $\hat{\Phi}_{n,s}(t)$ de $\Phi_{n,s}$ ainsi que $t\hat{\Phi}_{n,s}(t)$ sont intégrables. Alors, d'après la section II 1.1, l'opérateur $(H-E)^{-s} - (H_0-E)^{-s} = \Phi_{n,s}(R(E)^{e(n)}) - \Phi_{n,s}(R_0(E)^{e(n)})$ est à trace et la formule de trace a lieu :

(3.1)

$$\mathrm{Tr}\{(H-E)^{-s}-(H_0-E)^{-s}\} = \sum_j (\lambda_j-E)^{-s} + \frac{\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}(-E)^{-s} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty (\lambda-E)^{-s}\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(\lambda)d\lambda .$$

Pour E réel dans $\rho(H)$, nous définissons la fonction zêta ζ_E par

$$\zeta_E(s) = \mathrm{Tr}\{(H-E)^{-s} - (H_0-E)^{-s}\} ,$$

fonction analytique sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, s > 3e(n)\}$.

THEOREME IV.4. -

a) La fonction ζ_E se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$.

b) Si n est impair, les pôles de ζ_E sont simples, aux points $s = \frac{n}{2} - d$ pour $d \in \mathbb{N}^*$ et de résidu

$$\frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}-d)} \sum_{j=1}^{d} \frac{(-E)^{d-j}}{\Gamma(d-j+1)} a_j^n .$$

Si n est pair, les pôles de ζ_E sont simples, aux points $s = d$ pour $d = 1,\ldots,\frac{n}{2}-1$ et de résidu

$$\frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(d)} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-d} \frac{(-E)^{\frac{n}{2}-d-j}}{\Gamma(\frac{n}{2}-d-j+1)} a_j^n .$$

c) Si n est impair, la fonction ζ_E s'annule aux entiers négatifs. Si n est pair,

$$\zeta_E(-d) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \Gamma(d+1) \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}+d} \frac{(-E)^{\frac{n}{2}+d-j}}{\Gamma(\frac{n}{2}+d-j+1)} a_j^n \quad \text{pour } d \in \mathbb{N} .$$

Introduisons les fonctions $\tilde{\zeta}_E(s) = \zeta_E(s) - \sum_j (\lambda_j - E)^{-s} - \frac{\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}(-E)^{-s}$, $\tilde{Z}(t) = Z(t) - \sum_j e^{-t\lambda_j} - \frac{\mathrm{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}$ et la transformée de Mellin $\tilde{M}_E(s) = \int_0^\infty e^{tE}\tilde{Z}(t)t^{s-1}dt$. D'après la formule de trace et le comportement asymptotique de la phase de diffusion (Remarque IV.3), la fonction $\tilde{Z}(t)$ est bornée à l'infini et, par suite, la transformée de Mellin $\tilde{M}_E$ est définie pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2} - 1$ d'après le comportement asymptotique de $\tilde{Z}(t)$ à l'origine. La fonction $\tilde{M}_E$, holomorphe sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2} - 1\}$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ suivant l'identité

$$\tilde{M}_E(s) = \int_0^\infty e^{tE}\Big[\tilde{Z}(t) - (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{d} a_j^n t^j\Big] t^{s-1} dt + (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{d} (-E)^{\frac{n}{2}-j-s} \Gamma(j-\frac{n}{2}+s) a_j^n \tag{3.2}$$

dont le second membre définit une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2} - d + 1\}$.

On a d'autre part, pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2} - d$

$$\tilde{M}_E(s) = \int_0^{+\infty} e^{tE}\left\{\frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\frac{d}{d\lambda}\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda)d\lambda\right\}t^{s-1}dt$$

ce qui donne, après interversion des intégrales (ce qui est possible pour Re s assez grand d'après la croissance polynomiale de la phase de diffusion),

$$\tilde{M}_E(s) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-t(\lambda-E)}t^{s-1}dt\right\}\frac{d}{d\lambda}\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda)d\lambda$$

soit

$$\tilde{M}_E(s) = \frac{\Gamma(s)}{2i\pi}\int_0^{+\infty}(\lambda-E)^{-s}\frac{d}{d\lambda}\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda)d\lambda$$

et finalement

$$(3.3)\qquad \tilde{M}_E(s) = \Gamma(s)\tilde{\zeta}_E(s)\ .$$

La fonction $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, nulle aux entiers négatifs et au voisinage d'un de ces zéros, on a $(z+n)\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!}$. Le théorème découle alors directement de (3.2) et (3.3).

Supposons désormais la dimension n impaire.

THEOREME IV.5. - <u>Soit</u> ν <u>entier positif. On a l'identité de trace</u>

$$(3.4)_\nu\qquad \sum_j \lambda_j^\nu + \frac{\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(0)}{2i\pi}\delta_{0,\nu} = \int_0^{+\infty}\lambda^\nu\frac{d}{d\lambda}\left[\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{\ell=1}^{\nu+[\frac{n}{2}]} s_\ell^n\lambda^{-\ell} - \frac{\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda)}{2i\pi}\right]d\lambda\ .$$

Notons, pour E réel, la suite $(s^n_{\ell,E})$ $(\ell\geq 1)$ définie par

$$\frac{1}{2i\pi}[\operatorname{Log}\det \mathcal{S}(\lambda,H_0,H) - \operatorname{Log}\det \mathcal{S}(0,H_0,H)] \sim \left(\frac{\lambda-E}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{\ell=1}^{\infty} s^n_{\ell,E}(\lambda-E)^{-\ell}$$

lorsque λ tend vers l'infini. Remarquons les relations $s^n_{\ell,0} = s^n_\ell$ et $s^n_{\ell,E'} = \sum_{m=1}^{\ell}\binom{\frac{n}{2}-m}{\ell-m}(E'-E)^{\ell-m}s^n_{m,E}$.

Alors le prolongement méromorphe de ζ_E sur $\mathbb{C}$ s'obtient aussi à partir de la formule de trace que l'on écrit

$$(3.5)_d \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\zeta}_E(s) &= \int_0^{+\infty} (\lambda-E)^{-s} \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\mathrm{Log}\det \mathbb{S}(\lambda)}{2i\pi} - \left(\frac{\lambda-E}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{d} s^n_{\ell,E}(\lambda-E)^{-\ell}\right] d\lambda \\ &+ \left(-\frac{E}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\frac{n}{2}-\ell}{\frac{n}{2}-\ell-s}\, s^n_{\ell,E}(-E)^{-\ell-s} \end{aligned} \right.$$

où le second membre définit le prolongement sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2} - d\}$.

ζ_E s'annulant à l'entier $-\nu$, nous avons l'identité de trace

$$\tilde{\zeta}_E(-\nu) = -\sum_j (\lambda_j - E)^{\nu} - \frac{\mathrm{Log}\det \mathbb{S}(0)}{2i\pi}(-E)^{\nu}$$

avec $\tilde{\zeta}_E(-\nu) = \int_0^{+\infty} (\lambda-E)^{\nu} \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\mathrm{Log}\det \mathbb{S}(\lambda)}{2i\pi} - \left(\frac{\lambda-E}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{\nu+[\frac{n}{2}]} s^n_{\ell,E}(\lambda-E)^{-\ell}\right] d\lambda$.

$$+ \left(-\frac{E}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{\nu+[\frac{n}{2}]} \frac{\frac{n}{2}-\ell}{\frac{n}{2}-\ell+\nu}\, s^n_{\ell,E}(-E)^{-\ell+\nu} .$$

Cette identité de trace valable pour E dans $\mathbb{R}\setminus\sigma(H)$ se prolonge par continuité à tout réel négatif E . Faisant $E = 0$, nous obtenons l'identité de trace $(3.4)_\nu$.

Remarque IV.4. - Posons $\mathrm{PFs}(\lambda) = \frac{\mathrm{Log}\det \mathbb{S}(\lambda)}{2i\pi} - \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{[\frac{n}{2}]} s^n_\ell \lambda^{-\ell}$.
Alors la première identité de trace $(\nu=0)$ prend la forme $N = -\mathrm{PFs}(+\infty)$ où N est le nombre des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de l'hamiltonien H : c'est le théorème de Levinson généralisé ([L], [B], [B.F], [N]).

Remarque IV.5. - On trouve ces identités de trace pour la dimension $n = 3$ chez Buslaev ([B]).

V. - DIFFUSION PAR UN OBSTACLE.

Soit dans $\mathbb{R}^n$ (n quelconque) un obstacle compact Σ régulier (i.e. de frontière C^∞) de complémentaire Ω . Soit H_Ω le laplacien sur Ω avec conditions de Dirichlet au bord $\partial\Omega$ i.e. l'extension auto-adjointe du laplacien $(-\Delta, C_0^\infty(\Omega))$ de domaine $H_D^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega), u_{|\partial\Omega} = 0\}$. H_e désignera l'opérateur (impropre) auto-adjoint de $L^2(\mathbb{R}^n)$ égal à H_Ω sur $L^2(\Omega)$ et de spectre concentré en $+\infty$ sur $L^2(\Sigma)$. Avec ces notations, la résolvante $(H_e - \zeta)^{-1}$, $\zeta \notin \mathbb{R}^+$ (l'opérateur de la chaleur e^{-tH_e} resp.) est égal à la résolvante $(H_\Omega - \zeta)^{-1}$ (e^{-tH_Ω} resp.) sur $L^2(\Omega)$ et est nul sur $L^2(\Sigma)$.

Les opérateurs H_Ω et $H_0 = -\Delta_{\mathbb{R}^n}$ opérant dans deux espaces différents, il n'est pas possible de définir les opérateurs d'onde comme on le fait pour l'hamiltonien H avec potentiel. Pour y remédier, on introduit l'opérateur (dit d'indentification, bien que non injectif) J de restriction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\Omega)$ ($Ju = u_{|\Omega}$) et les opérateurs d'onde $W_\pm(J, H_0, H_\Omega) = \text{s-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{itH_\Omega} J e^{-itH_0}$ ([KA 3]). On montre, par ailleurs, que $(H_e+1)^{-\varepsilon(n)} - (H_0+1)^{-\varepsilon(n)}$ $(\varepsilon(n) > \frac{n}{2})$ est un opérateur à trace ([RS 3] , appendice XI. 10), ainsi les opérateurs d'onde $W_\pm((H_0+1)^{-\varepsilon(n)}, (H_e+1)^{-\varepsilon(n)})$ existent et sont complets. Le "principe" d'invariance a lieu et prend la forme $W_\pm(J, H_0, H_\Omega) = JW_\mp((H_0+1)^{-\varepsilon(n)}, (H_e+1)^{-\varepsilon(n)})$. Les opérateurs d'onde $W_\pm(J, H_0, H_\Omega)$ sont donc complets et l'opérateur de diffusion $S(H_0, H_\Omega) = W_-(J, H_0, H_\Omega)^* W_+(J, H_0, H_\Omega)$ est unitaire. La matrice de diffusion $\mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(\lambda, \Sigma)$ associée, opérateur unitaire de $L^2(S^{n-1})$, est de la forme $1 + \mathcal{T}(\lambda, \Sigma)$ où $\mathcal{T}(\lambda, \Sigma)$ est un opérateur à trace, continu par rapport à λ dans

$\mathbb{R}_*^+$ et l'obstacle Σ ([KA 4]). On note $\xi(\lambda,\Sigma)$ la phase de diffusion, i.e. la fonction continue en λ et Σ vérifiant $\det \mathcal{S}(\lambda,\Sigma) = e^{-2i\pi\xi(\lambda,\Sigma)}$ et $\xi(\lambda,\Phi) = 0$.

THEOREME V. - <u>Soit</u> Σ <u>un compact régulier de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>de complémentaire</u> Ω. <u>Soit</u> H_Ω <u>le laplacien sur</u> $L^2(\Omega)$ <u>avec condition de Dirichlet sur</u> $\partial\Omega$, $H_e = H_\Omega \oplus (+\infty)$ <u>le laplacien (impropre) correspondant à la décomposition</u> $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\Omega) \oplus L^2(\Sigma)$ <u>et</u> $\xi(\lambda,\Sigma)$ <u>la phase de diffusion par l'obstacle</u> Σ. <u>On a la formule de trace</u>

$$(T_\Sigma) \qquad \mathrm{Tr}\{e^{-tH_e} - e^{-tH_0}\} = -t\int_0^{+\infty} \xi(\lambda,\Sigma)e^{-\lambda t}dt .$$

Soit (q_m) une suite croissante de potentiels C^∞ positifs de support Σ et tendant ponctuellement sur $\mathring{\Sigma}$ vers $+\infty$. Pour des potentiels q de support contenu dans un compact fixe K, la phase de diffusion $\xi(\lambda,q) = \xi_E((\lambda-E)^{-e(n)},q)$ (E convenable) est, d'après la formule III (3.6) une fonction continue par rapport à λ dans $\mathbb{R}_*^+$ et le potentiel q pour la topologie de la convergence uniforme sur K avec $\xi(\lambda, q\equiv 0) \equiv 0$. Les hamiltoniens $H_m = H_0 + q_m$ étant définis positifs, la formule de trace pour l'opérateur de la chaleur s'écrit

$$\mathrm{Tr}\{e^{-tH_m} - e^{-tH_0}\} = -t\int_0^{+\infty} \xi(\lambda,q_m)e^{-\lambda t}d\lambda .$$

Le noyau de l'opérateur de la chaleur e^{-tH_m} est donné par la formule de Feynman-Kac sous forme d'intégrale de Wiener

$$e^{-tH_m}(x,y) = E_t^{x,y}[\exp\{-\int_0^t q_m(\omega(s))ds\}] \qquad ([R.S\ 1]).$$

On a donc

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} E_t^{x,x}[\exp\{-\int_0^t q_m(\omega(s))ds\} - 1]dx = -t\int_0^\infty \xi(\lambda,q_m)e^{-t\lambda}d\lambda .$$

Utilisant le théorème de convergence dominée, nous obtenons

$$\lim_{m\to+\infty} E_t^{x,y}[\exp\{-\int_0^t q_m(\omega(s))ds\}] = E_t^{x,y}[\Xi_\Sigma(\omega(s),t)]$$

où $\Xi_\Sigma(\omega(s),t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(s)\in\Omega \text{ pour } s\in[0,t] \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Le noyau $E_t^{x,y}[\Xi_\Sigma(\omega(s),t)]$ est le noyau de l'opérateur de la chaleur e^{-tH_e} donc le membre de gauche de (1) converge vers $\int_{\mathbb{R}^n} E_t^{x,x}[\Xi_\Sigma(\omega(s),t)-1]\,dt = \mathrm{Tr}\{e^{-tH_e}-e^{-tH_0}\}$ (convergence dominée à nouveau).

La suite des potentiels ayant été choisie croissante, la suite des phases de diffusion $\xi(\lambda,q_m)$ est une suite décroissante de fonctions négatives convergeant vers la phase $\xi(\lambda,\Sigma)$ ([KA4]). Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, le membre de droite de (1) converge vers $-t\int_0^\infty \xi(\lambda,\Sigma)e^{-\lambda t}d\lambda$ et on obtient la formule de trace (T_Σ) .

BIBLIOGRAPHIE.

[A] S. AGMON : Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa IV 2 (1975) 151-218.

[A.B.P] M. ATIAYH, R. BOTT, V.K. PATODI : On the heat equation and the index theorem, Invent. Math. 19 (1973) 279-330.

[A.S] P. ALSHOLM, G. SCHMIDT : Spectral theory and scattering theory for Schrödinger Operators, Arch. Rat. Mech. Anal. 40 (1971) 281-311.

[B.G.M] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET : Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture notes in math. 194 (1971) Springer.

[B.K] M.S. BIRMAN, M.G. KREIN : On the theory of wave operators and scattering operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 475-478.

[B 1] V.S. BUSLAEV : Trace formulas for the Schrödinger operator in a three dimensional space. Dokl. Akad. Nauk SSSR 143 (1962) 1067-1070. (En russe) MR 24 # A3517.

[B 2] V.S. BUSLAEV : The trace formulas and certain asymptotic estimates of the kernel of the resolvent for the Schrödinger operator in three-dimensional space. Probl. Math. Phys. 1. Spectral theory and wave operators Izdat Leningrad Univ. (1966) 82-101 (en russe) MR 34 # 34.

[B.F] V.S. BUSLAEV, L.D. FADEEV : Formulas for traces for a singular Sturm-Liouville differential operator. Soviet. Math. Dokl. (1960) 451-454.

[C] J. CHAZARAIN : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. Invent. Math. 24 (1974) 65-82.

[CV] Y. COLIN DE VERDIERE : Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$. Annales de l'E.N.S. 14 (1981).

[D] J. DIXMIER : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. (1969) Gauthiers-Villard.

[D.G] J.J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. Math. 29 (1975) 39-79.

[D.S] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ : Linear operators II (1963) Interscience.

[D.T] P. DEIFT, E. TRUBOWITZ : Inverse scattering on the line C.P.A.M. 32 (1979) 121-151.

[F.Z] P. FADDEEV, V. ZAKHAROV : KdV equation : a completely integrable hamiltonien system. Functionnal Anal. and Appl. 5 (1971) 280-288.

[GL] P. GILKEY : The spectral geometry of a riemannian manifold. J. Diff. Geo. 10 (1975) 601-618.

[GN] J. GINIBRE : La méthode dépendant du temps dans le problème de complétude asymptotique. Prétirage Orsay LPTHE 80/10.

[G.K] I.C. GOHBERG, M.G. KREIN : Introduction to the theory of linear non self-adjoint operators. Translations A.M.S. 18 (1969).

[I] T. IKEBE : Eigenfunctions expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. Arch. Rat. Mech. Anal. 5 (1960) 1-34.

[J] A. JENSEN : Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions, results in $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 5$. Duke Math. J. 47 (1980) 57-81.

[J.K 1] A. JENSEN, T. KATO : Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains. Comm. in Partial Diff. Equations 3.12 (1978) 1165-1195.

[J.K 2] A. JENSEN, T. KATO : Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions. Duke Math. J. 46 (1979) 583-612.

[KA 1] T. KATO : On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators. J. of Math. Soc. of Japan. IX 2 (1957) 239-249.

[KA 2] T. KATO : Perturbation theory for linear operators (1966). Springer.

[KA 3] T. KATO : Scattering theory with two Hilbert spaces. J. of Functional Analysis 1 (1967) 342-369.

[KA 4] T. KATO : Monotonocity theorems in scattering theory. Hadronic Journal 1 (1978) 134-154.

[KR 1] M.G. KREIN : On the trace formula in the theory of perturbation. Mat. Sb. 33.75 (1953) 597-626 (en russe).

[KR 2] M.G. KREIN : On perturbation determinants and a trace formula for unitary and self adjoint operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 268-271.

[L. L] L. LANDAU, E. LIFCHITZ : Mécanique quantique (1967). Mir Moscou.

[LP 1] P. LAX, R.S. PHILLIPS : Scattering theory for automorphic functions. Annals of Math. Studies (1976). Princeton.

[LP 2] P. LAX, R.S. PHILLIPS : The time delay operator and a related trace formula. Topics in Functional Analysis, edited by Gohberg and Kac. Academic Press (1978) 197-215.

[MC] H.P. MC KEAN : Integrable systems and algebraic curves 83.200. Dans Global analysis Lectures notes in math. 755 (1979) Springer.

[ME] R. MELROSE : Forward scattering by a convex obstacle. C.P.A.M. 33 (1980) 461-499.

[M.M] H.P. MC KEAN, P. VAN MOERBECKE : The spectrum of Hill's equation. Invent. Math. 30 (1975) 217-254.

[M.P] S. MINAKSHISUNDARAM, A. PLEJEL : Some properties of the eigenvalues of the Laplace operator on riemannian manifolds. Can. J. Math. 1 (1949) 242-256.

[M.R] A. MAJDA, J. RALSTON : An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains, I, II, III. Duke Math. J. 45 (1978) 183-196, 513-536. 46 (1979) 725-731.

[M.S] H.P. MC KEAN, I.M. SINGER : Curvature and the eingenvalues of the laplacian. J. Diff. Geo. 1 (1967) 43-69.

[MU] W. MULLER : Spectral theory of non compact riemannian manifolds with cusps and a related trace formula. Prétirage I.H.E.S. (1980) M/80/46.

[N] R.G. NEWTON : Non central potentials : the generalized Levinson theorem and the structure of the spectrum. J. of Math. Phys. 18 (1977) 1348-1357.

[P.P] V. PETKOV, G. POPOV : Asymptotique de la phase de diffusion pour des domaines non convexes. C.R. Acad. Sc. Paris 292 (1981) 275-277.

[R] J. RALSTON : Propagation of singularities and the scattering matrix NATO Conference on singularities of boundary value problems Maratea 1980.

[R.S 1] M. REED, B. SIMON : Fourier analysis, self-adjointness. (1975) Academic Press.

[R.S 2] M. REED, B. SIMON : Analysis of operators. (1978) Academic Press.

[R.S 3] M. REED, B. SIMON : Scattering theory. (1979) Academic Press.

[SI] B. SIMON : Trace ideals and their applications. (1979) Cambridge.

[S.W] E.M. STEIN, G. WEISS : Introduction to Fourier analysis on euclidian spaces (1971), Princeton.

[V] A.B. VENKOV : Spectral theory of automorphic functions the Selberg zêta-function and some problems of analytic number theory and mathematical physics. Russian Math. Surveys 34 (1979) 79-153.

[W] G. WATSON : A treatise on the theory of Bessel functions. (1952) Cambridge University Press.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE l'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et Traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BONNET Jean-Louis	Clinique Ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique Hépato-gastro-entérologique
Mme	BONNIER Jeanne-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques Pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique

.../...

MM.	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analyti-
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRABBÉ Pierre	C.E.R.M.O.
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRÉ Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT 1)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Maths Pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale

MM.	LATURAZE Jean	Biochimie Pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire - I.S.N.
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MICOUD Max	Clinique Maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie Physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PERAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie Médicale (Neurologie)
	RACHAIL Michel	Clinique Médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	GREENE Richard	Basses Températures
	ROTH Walter	Cristallographie
	SZYMANSKI Zdzislaw	Institut des Sciences Nucléaires

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mles	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON Roger	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHARDON Michel	Géographie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale.
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées

[illegible]	KAHANE Josette	Physique
[illegible]	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - Pharmacie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)
Mme	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mle	PIERY Yvette	Physiologie Animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	AURIAULT Jean-Louis	Mécanique (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BENABID Alim-Louis	Médecine et chirurgie expérimentales
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOITET Christian	Mathématiques appliquées
	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
MM.	CHERADAME Hervé	Chimie papetière (EFP)
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquées (EFP)
	COHEN Henri	Mathématiques pures
	COLIN DE VERDIERE Yves	Maths pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculai
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépato-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	OUDET Bruno	M.I.A.G.
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRAUD Robert	Chimie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie

MM. PHELIP Xavier	Rhumatologie
RACINET Claude	Gynécologie et Obstétrique
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM. ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique
SAKAROVITCH Michel	Maths appliquées
SCHAERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Cryptogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. SIDNEY Stuart	Mathématiques pures

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie (Pharmacie)

PERSONNALITES HABILITEES PAR LE CONSEIL SCIENTIFIQUE DE L'U.S.M.G. A ETRE DIRECTEURS DE THESE :

MM. BELAKHOVSKY Michel	CENG.DRF/Chimie physique nucléaire
BIAREZ Jean-Pierre	Professeur Mécanique
BOEHLER Jean-Pierre	M.A. Mécanique
BOIS Philippe	Mécanique
BOLLIET Louis	Prof.USS IUT II Informatique
BOURRET Alain	CENG-DRF/Physique solide
BRODEAU François	Prof.USS Maths appliquées
CHAMBEROD André	CENG/DRF/Physique solide
CHAMBRON William	CENG/DRF/Physique solide
CHAPPERT Jacques	CENG/DRF/Chimie physique nucléaire
Mme CHATELIN Françoise	Prof.USS Maths appliquées
MM. COURT Jean	M.A. Chimie générale
DELAYE Jean-Marc	CENG
MM. DESCLAUX Jean-Paul	CENG/DRF/Chimie physique nucléaire
DOMINGO Luna	Maths pures
DUC-JACQUET Marc	M.C.USS Maths appliquées
DUFRESNOY Alain	Maths pures
GIROUD Jean-Pierre	M.A. Mécanique
HERVE Alain	CENG/DRF/R.M.N.
HILLAIRET Jacques	CENG/DRF/Physique solide
JORRAND Philippe	M.R. CNRS Maths appliquées
KLEITZ Michel	Maître rech.CNRS ENSEEG
Mme LEJEUNE-JALABERT Monique	Maths pures
MM. LEMOINE Marcel	Géologie Alpine LA 69
LETOURNEUR Jean	Prof.Hon. Ecole mines Saint Etienne
LIGEON Emile	CENG/DRF/Physique solide
MAISONNEUVE Bernard	M.C.USS Maths appliquées
MONDARON Paul	M.A. Zoologie
MOSER Pierre	CENG/DRF/Physique solide
PECCOUD François	M.C. USS Paths appliquées
PERETTO Pierre	CENG/DRF/Chimie physique nucléaire
PIERRE Jean-Louis	M.A. Chimie
PHAM DINH Tuan	Attaché rech. MATHS appliquées
POGGI André	Ingénieur CNRS Géophysique
RINAUDO Jean	M.A. Chimie générale
ROBERT Raoul	Maths appliquées
ROMIER Guy	Prof. USS Maths appliquées
ROSSAT-MIGNOD Jean	CENG/DRF/Diffraction neutronique
ROUAULT Jacques	M.C. USS Maths appliquées
SAXOD Raymond	M.A. Zoologie
SOUQUET Jean-Louis	M.A. Chimie ENSEEG
SUSCILLON Michel	CENG/DRF/Hématologie
TANE Michel	Chimie
TEOULE Robert	CENG/Radiobiologie
VALLON Michel	M.A. Géophysique
VILLAIN J.	CENG/DRF/Diffraction neutronique
VIVIAN Robert	M.A. Géographie
Mme ZOLL	Pharmacie DIJON (matière médicale)

Fait à Saint Martin d'Hères en novembre 1978

VU

Grenoble, le 26 mars 1981

Le Président de la thèse

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 24.03.81

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

PAYAN