Leray, J.
Math. Annalen 162, 228—236 (1966)

Équations hyperboliques non-strictes: contre-exemples, du type De Giorgi, aux théorèmes d'existence et d'unicité

Dédié à M. Gottfried Köthe à l'occasion de son anniversaire 60-ième

Par

Jean Leray à Paris

Introduction

1. Considérons dans $\mathbf{R}^l$ un problème de Cauchy, hyperbolique non strict, d'inconnue $u(x)$:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} a_1(x, D) \ldots a_p(x, D)\, u(x) = b(x, D)\, u(x) + v(x) \\ D^{m-1} u \,|\, S_0 \quad \text{donné}; \end{cases}$$

$D = \dfrac{\partial}{\partial x}$; $a_1, \ldots, a_p$ sont p opérateurs strictement hyperboliques relativement à S_0. Notons

$$\text{ordre } (a_1, \ldots, a_p) = m; \text{ ordre (b)} \leqq m - p + q\,, \quad \text{où} \quad 0 \leqq q\,.$$

Supposons que S_0 est un hyperplan; notons $\gamma^{n,(\alpha)}$ la classe des fonctions $\mathbf{R}^l \to \mathbf{C}$ dont les dérivées $f^{(n)}$ d'ordres $\leqq n$ ont des restrictions aux hyperplans S_t parallèles à S_0 qui vérifient uniformément par rapport à t la condition d'appartenir à la classe α de Gevrey:

$$\sup_{\substack{x \in S_t \\ |\beta| \leqq s}} |D^\beta f^{(n)}| \leqq (\text{const.})^s\, (s\,!)^\alpha$$

où D^β est une dérivée, d'ordre $|\beta|$, sur S_t.

On sait ceci (pour l'énoncé précis voir [2], n^0 23,24): si les données du problème de Cauchy (1.1) appartiennent à la classe $\gamma^{n,(\alpha)}$, alors *ce problème possède une solution unique u et $u \in \gamma^{n,(\alpha)}$, quand on a*:

$$n \geqq m + p\,, \quad 1 \leqq \alpha < \frac{p}{q}\,.$$

Si $1 \leqq \alpha = \dfrac{p}{q}$, ces théorèmes d'existence et d'unicité valent sous certaines restrictions (existence locale, c'est-à-dire au voisinage de S_0; unicité sous l'hypothèse $u \in \gamma_2^{m+p,(\alpha)}$).

Un exemple de Giorgi montre que ces théorèmes deviennent faux quand on supprime l'hypothèse $\alpha \leqq \dfrac{p}{q}$; plus précisément, de Giorgi montre que cette hypothèse est nécessaire dans le cas $m = p = 8$, $q = 4$.

Nous allons construire, par un procédé simplifiant[1]), celui qu'emploie DE GIORGI, des contre-exemples prouvant que, quels que soient[2]) $m \geqq p \geqq 1$ et $q \geqq 1$, *l'hypothèse* $\alpha \leqq \frac{p}{q}$ *est nécessaire à la validité des théorèmes d'existence et d'unicité*[3]) qu'énonce [2] (n^0 23, 24, 25 et 26).

Cependant, si l'on impose à $a_1, \ldots, a_p, b$ d'être *réels*, nous ne prouvons la nécessité de cette hypothèse $\alpha \leqq \frac{p}{q}$ que dans le cas où q est *pair*.

§ 1. Préliminaires

2. RÉDUCTION AU CAS: $l = 2$, $m = p$. — Le théorème d'existence implique le théorème d'unicité, d'après HOLMGREN: voir [2], n⁰ 24. Il suffit donc de construire un contre-exemple au théorème d'unicité. Nous choisissons ce contre-exemple fonction de deux des variables indépendantes, ce qui nous ramène au cas où $\mathbf{R}^l = \mathbf{R}^2$.

Supposons que l'équation, à coefficients indéfiniment différentiables,

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \quad (\text{ordre } (b) \leqq q) \tag{2.1}$$

possède une solution, indéfiniment différentiable, contredisant le théorème d'unicité, c'est-à-dire s'annulant p fois avec t; on voit que toutes ses dérivées s'annulent avec t. Par suite u est un contre-exemple au théorème d'unicité pour l'équation

$$\prod_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \prod_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x}\right) b u$$

qui est du type (1.1), avec

$$a_1 = \prod_{k=0}^{m-p} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x}\right), \; a_j = \frac{\partial}{\partial t} \; (1 < j \leqq p).$$

Pour traiter le cas (m, p, q) quelconque, il nous suffit donc de construire, pour tout (p, q, α) tel que $\frac{p}{q} < \alpha$, un contre-exemple au théorème d'unicité concernant une équation du type (2.1); pour ce type d'équation, $m = p$.

3. QUASI-NORMES FORMELLES. — Nous notons (t, x) les coordonnées de $\mathbf{R}^2$ et S_t la droite d'abscisse t. Etant donnée une fonction $u(t, x)$, définie sur une bande $T_0 \leqq t \leqq T_1$, nous définissons sa quasi-norme

$$|u, S_t| = \sup_x |u(t, x)|$$

et sa quasi-norme formelle

$$|D^{h, \infty} u, S_t, \varrho| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varrho^s}{s!} \sup_j \left| \frac{\partial^{j+s} u}{\partial t^j \partial x^s}, S_t \right|, \text{ où } \; 0 \leqq j \leqq h; \tag{3.1}$$

c'est une série formelle en ϱ, qui peut être une fonction de ϱ holomorphe à l'origine.

---

[1]) Là où nos § 2 et § 3 emploient 5 bandes, DE GIORGI en emploie 7.

[2]) Aucune hypothèse n'est faite sur p/q.

[3]) Et aussi à la validité de théorèmes de G. TALENTI [3] apparentés à ceux-ci.

Soit une série formelle

$$\Phi(\varrho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varrho^s}{s!} \quad \Phi_s;$$

$$\Phi(\varrho) \gg 0 \quad \text{signifie} \quad \Phi_s \geqq 0\,, \quad \forall s\,;$$

on dit que $\Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$ *(classe de Gevrey formelle)* quand il existe une constante c, dépendant de Φ, telle que

$$\Phi_s \leqq c^s (s!)^\alpha\,; \tag{3.2}$$

on dit que $u \in \gamma^{h,(\alpha)}$ *(classe de Gevrey)* quand il existe une série formelle $\Phi(\varrho)$, indépendante de t, telle que

$$|D^{h,\infty} u, S_t, \varrho| \leqq \Phi(\varrho) \in \Gamma^{(\alpha)}\,. \tag{3.3}$$

Etant donné un opérateur différentiel

$$b\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j=0}^{q} b_j(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q,$$

nous notons

$$|D^{h,\infty} b, S_t, \varrho| = \sum_{j=0}^{q} |D^{h,\infty} b_j, S_t, \varrho|\,;$$

nous disons que $b \in \gamma^{h,(\alpha)}$ quand $b_j \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $\forall j$.

4. LE CONTRE-EXEMPLE À CONSTRUIRE est, d'après le n° 2, le suivant: Etant donnés (p, q, α) tels que

$$p \geqq 1, \quad q \geqq 1, \quad \frac{p}{q} < \alpha\,,$$

construire, sur une bande $0 \leqq t \leqq T$ de $\mathbf{R}^2$, une équation linéaire homogène

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \quad (\text{ordre } b \leqq q) \tag{4.1}$$

possèdant une solution $u(t, x) \neq 0$, telle que

$$\frac{\partial^h u}{\partial t^h}(0, x) = 0, \quad \forall h; \tag{4.2}$$

$$u \in \gamma^{h,(\alpha)}, \quad b \in \gamma^{h,(\alpha)}, \quad \forall h\,. \tag{4.3}$$

Note. — u et b sont indépendants de h.

DE GIORGI construit un tel contre-exemple en résolvant d'abord le problème non homogène que voici.

5. ENONCÉ D'UN PROBLÈME NON HOMOGÈNE. — Nous nous donnons (p, q, α), tels que

$$p \geqq 1, \quad q \geqq 1, \quad \frac{p}{q} < \alpha\,,$$

un nombre l_1 et un paramètre $l \leqq l_1$; nous cherchons sur la bande

$$0 \leqq t \leqq 1$$

de $\mathbf{R}^2$ une équation linéaire homogène

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = b\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \quad (\text{ordre } (b) \leqq q;\ b \text{ dépend de } l) \tag{5.1}$$

et une solution u de cette équation telles que:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} u(t,x) = e^{l}, \quad b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 0\,, \\ u(t,x) = e^{l'(l)}, b = 0 \quad \text{pour } t \text{ voisin de } 1\,. \end{cases}$$

$$(5.3)\qquad \begin{cases} |D^{h,\infty}u, S_t, \varrho| \ll \theta(l)\,\Phi(\varrho), \quad \forall h\,, \\ |D^{h,\infty}b, S_t, \varrho| \ll \theta(l)\,\Phi(\varrho), \quad \forall h\,, \end{cases}$$

où: l', θ, Φ dépendent de h; Φ ne dépend pas de l; $\Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$; l' et θ sont des fonctions de l, ayant les propriétés suivantes:

$$l'(l) < l\;;$$

si nous définissons les suites $l_1, l_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots$ par la loi de récurrence:

$$l_{k+1} = l'(l_k)\,, \quad \theta_k = \theta(l_k)$$

alors

$$(5.4)\qquad \lim_{k\to\infty} k^c\,\theta_k = 0 \quad \text{pour toute constante } c\,.$$

6. Construction[4]) du contre-exemple $u(t, x)$ ayant les propriétés qu'exige le n⁰ 4. — Supposons résolu le problème non homogène qu'énonce le n⁰ 5; sa solution, pour $l = l_k$, sera notée $b_k\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $u_k(t, x)$.

Définissons $T_1, T_2, \ldots$ par la loi de récurrence:

$$T_1 = 0,\; T_{k+1} - T_k = \frac{1}{k^2}\;;$$

soit

$$T = \lim_{k\to\infty} T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty\,.$$

Définissons

$$b\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k^{2p} b_k\left(\frac{t - T_k}{T_{k+1} - T_k}, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$u(x,t) = u_k\left(\frac{t - T_k}{T_{k+1} - T_k}, x\right) \quad \text{pour} \quad T_k \leqq t \leqq T_{k+1}\,.$$

Vu (5.2), b et u sont indéfiniment dérivables sur la bande $0 \leqq t < T$; vu (5.1), sur cette bande, (4.1) est vérifiée.

Vu (5.3):

$$|D^{h,\infty}u, S_t, \varrho| \ll k^{2h}\theta_k \Phi(\varrho)$$

$$|D^{h,\infty}b, S_t, \varrho| \ll k^{2(h+p)}\theta_k \Phi(\varrho)\,, \quad \text{où} \quad \Phi \in \Gamma^{(\alpha)}$$

D'où, vu (5.4):

$$|D^{h,\infty}u, S_t, \varrho| \ll \varepsilon(t)\,\Phi(\varrho)\,,$$

$$|D^{h,\infty}b, S_t, \varrho| \ll \varepsilon(t)\,\Phi(\varrho)\,,$$

où $\lim_{t\to T} \varepsilon(t) = 0$; bien entendu, $\varepsilon(t)$ dépend de h.

Donc $u \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $b \in \gamma^{h,(\alpha)}$, $\forall h$; toutes les dérivées de u et des coefficients de b s'annulent pour $t = T$.

---

[4]) Je remercie K. Jörgens d'avoir rectifié cette partie de mon exposé.

Nous avons construit le contre-exemple qu'exige le n⁰ 4, à la permutation près de 0 et T.

7. CONCLUSION DU § 1. — Ce qu'affirme l'introduction, à savoir *la nécessité de l'hypothèse* $\alpha \leqq p/q$ *dans les théorèmes d'existence et d'unicité concernant l'équation hyperbolique non stricte, sera donc prouvé quand nous aurons résolu le problème non homogène,* qu'énonce le n⁰ 5.

§ 2. Résolution du problème non homogène (n⁰ 5)

Il faut évidemment supposer u et b fonctions de x; il suffira de prendre u linéaire en $e^{i\omega x}$, où $\omega = \omega(l)$. Le terme de u indépendant de x est une fonction de t qui sera constante près des bords de la bande; le coefficient de $e^{i\omega x}$ aura pour coefficient, dans u, une fonction de t qui sera constante au centre de la bande. Cette bande ne sera pas la bande $0 \leqq t \leqq 1$, comme l'annonce le n⁰ 5, mais la bande

$$0 \leqq t \leqq 5 .$$

Notation. c désignera divers nombres, fonctions de (h, p, q), mais indépendants de l.

8. INTRODUCTION DU TERME EN $e^{i\omega x}$ DANS u. —

Lemme 1. *Donnons-nous des nombres*

$$m < l, \quad \omega > 1 .$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqq t \leqq 1$$

une équation du type (5.1) *admettant une solution* u, *telle que*

$$u(t, x) = e^l, b = 0 \quad \textit{pour } t \textit{ voisin de } 0;$$

$$u(t, x) = e^l + e^{m+i\omega x}, b = 0 \quad \textit{pour } t \textit{ voisin de } 1;$$

$$|D^{h,\infty} u, S_t, \varrho| \ll c e^{l+\omega\varrho} ;$$

$$|D^{h,\infty} b, S_t, \varrho| \ll c e^{m-l+\omega\varrho} .$$

Notation. — $f(t)$ désignera une fonction fixe, indéfiniment dérivable, telle que

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 0, \quad f(t) = 1 \text{ pour } t \text{ voisin de } 1.$$

Preuve. — La fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1):

$$u = e^l + e^{m+i\omega x} f(t)$$

$$b = e^{m-l+i\omega x} \frac{d^p f(t)}{dt^p} \left(\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} + 1\right) .$$

9. AUGMENTATION DU COEFFICIENT DE $e^{i\omega x}$ DANS u. —

Lemme 2. *Donnons-nous des nombres*

$$m < l < n, \omega \quad \textit{tels que} \quad n - m > 1, \omega > 1 .$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqq t \leqq 2$$

une équation du type (5.1) *admettant une solution* u, *telle que*

$$u(t,x)=e^l,\ b=0 \quad \textit{pour } t \textit{ voisin de } 0;$$

$$u(t,x)=e^l+e^{n+i\omega x},\ b=0 \quad \textit{pour } t \textit{ voisin de } 2;$$

$$|D^{h,\infty}u, S_t, \varrho| \leqslant c(n-m)^h e^{n+\omega\varrho}$$

$$|D^{h,\infty}b, S_t, \varrho| \leqslant c e^{m-l+\omega\varrho} + c\frac{(n-m)^p}{\omega^q}.$$

Preuve. — Définissons b et u par le lemme 1 pour $0 \leqq t \leqq 1$. Pour $1 \leqq t \leqq 2$, la fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1):

$$u = e^l + e^{nf+m(1-f)+i\omega x} \quad \text{où} \quad f = f(t-1);$$

$$b = e^{-nf-m(1-f)}\frac{d^p e^{nf+m(1-f)}}{dt^p}\frac{1}{(i\omega)^q}\frac{\partial^q}{\partial x^q}.$$

Or

$$e^{-nf-m(1-f)}\frac{d^p\, e^{nf+m(1-f)}}{dt^p}$$

est un polynome en $n-m$ de degré p, dont les coefficients sont des fonctions fixes de t.

10. Modification du terme de u indépendant de x. —

Lemme 3. *Donnons-nous des nombres*

$$m < l' < l < n, \quad \omega \textit{ tels que } n-m > 1,\ \omega > 1.$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqq t \leqq 3$$

une équation du type (5.1) *admettant une solution* u, *telle que*

$$u(t,x)=e^l, \quad b=0 \textit{ pour } t \textit{ voisin de } 0;$$

$$u(t,x)=e^{l'}+e^{n+i\omega x}, \quad b=0 \textit{ pour } t \textit{ voisin de } 3;$$

$$|D^{h,\infty}u, S_t, \varrho| \leqslant c(n-m)^h e^{n+\omega\varrho}$$

$$|D^{h,\infty}b, S_t, \varrho| \leqslant c(n-m)^{h+p}e^{l-n+\omega\varrho} + c e^{m-l+\omega\varrho} + c\frac{(n-m)^p}{\omega^q}.$$

Preuve. — Définissons b et u par le lemme 2 pour $0 \leqq t \leqq 2$. Pour $2 \leqq t \leqq 3$, la fonction u et l'opérateur b que voici vérifient (5.1):

$$u = e^{l(1-f)+l'f} + e^{n+i\omega x}, \quad \text{où} \quad f = f(t-2);$$

$$b = e^{-n-i\omega x}\frac{d^p\, e^{l(1-f)+l'f}}{dt^p}\frac{1}{i\omega}\frac{\partial}{\partial x}.$$

11. Fin de la construction de b et u. — Pour $0 \leqq t \leqq 3$, définissons b et u par le lemme 3; pour $3 \leqq t \leqq 5$, définissons b et u par le lemme 2, où l'on remplace

$$0 \leqq t \leqq 2 \quad \text{par} \quad 5 \geqq t \geqq 3$$

$$m < l < n \quad \text{par} \quad m < l' < n.$$

Il vient:

Lemme 4. *Donnons-nous des nombres*

$$m < l' < l < n,\ \omega \quad \textit{tels que} \quad n-m > 1 \quad \textit{et} \quad \omega > 1. \tag{11.1}$$

On peut construire sur la bande

$$0 \leqq t \leqq 5$$

une équation du type (5.1) *admettant une solution* u, *telle que*

$$(11.2) \quad \begin{cases} u(t,x) = e^{l},\ b = 0 & \text{pour } t \text{ voisin de } 0; \\ u(t,x) = e^{l'},\ b = 0 & \text{pour } t \text{ voisin de } 5; \end{cases}$$

$$(11.3) \quad \begin{cases} |D^{h,\infty} u, S_t, \varrho| \ll c(n-m)^h e^{n+\omega\varrho}; \\ |D^{h,\infty} b, S_t, \varrho| \ll c(n-m)^{h+p} e^{l-n+\omega\varrho} + c e^{m-l'+\omega\varrho} + c\dfrac{(n-m)^p}{\omega^q}. \end{cases}$$

12. CHOIX DE l', m, n, ω EN FONCTION DE l. — Soient un paramètre $L > 1/4$ et un nombre fixe $\alpha \geqq 1$.

Choisissons, en accord avec (11.1):

$$m = -8L, \quad l' = -6L, \quad l = -4L, \quad n = -2L, \quad \omega = l^{\alpha};$$

définissons

$$(12.1) \qquad \theta = |l|^{p-\alpha q}$$

Puisque $\sup_L L^c e^{-L} < \infty$, (11.3) donne

$$(12.2) \qquad \begin{cases} |D^{h,\infty} u, S_t, \varrho| \ll c\theta e^{-L+L^{\alpha}\varrho} \\ |D^{h,\infty} b, S_t, \varrho| \ll c\theta [e^{-L+L^{\alpha}\varrho} + 1]. \end{cases}$$

Le n° 13 va prouver le lemme suivant:

Lemme 5. — *Il existe une série formelle* $\Phi(\varrho) \in \Gamma^{(\alpha)}$, *indépendante de* L, *telle que*

$$e^{-L+L^{\alpha}\varrho} \ll \Phi(\varrho), \quad \forall L \geqq 0.$$

Donc (12.2) implique (5.3): le problème non homogène qu'énonce le n° 5 est résolu, quand (5.4) a lieu. Or:

$$l'(l) = \frac{3}{2} l;$$

d'où, en choisissant $l_1 = -\dfrac{3}{2}$, vu (12.1):

$$l_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^k; \quad \theta_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{(\alpha q - p)k};$$

d'où (5.4), si, comme le suppose le n° 5:

$$\alpha > \frac{p}{q}.$$

Le problème non homogène (n° 5) a donc une solution; vu le n° 7, ce qu'affirme l'introduction est prouvé; mais b a été choisi *non réel.*

13. PREUVE DU LEMME 5. — On a

$$(13.1) \qquad e^{-L+L^{\alpha}\varrho} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varrho^s}{s!} L^{\alpha s} e^{-L}.$$

Or

$$\sup_{L>0}(L^\beta e^{-L}) = \left(\frac{\beta}{e}\right)^\beta, \quad \text{si} \quad \beta \geqq 0\,, \tag{13.2}$$

car ce sup est atteint pour $L = \beta$.

Rappelons[5]) que

$$\left(\frac{s}{e}\right)^s < s!\,;$$

de (13.2) résulte donc

$$\sup_{L>0}(L^{\alpha s} e^{-L}) = \left(\frac{\alpha s}{e}\right)^{\alpha s} \leqq \alpha^{\alpha s}(s!)^\alpha\,.$$

En portant cette inégalité dans (13.1), nous obtenons

$$e^{-L+L^\alpha\varrho} \ll \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha^\alpha \varrho)^s (s!)^{\alpha-1} \in \Gamma^{(\alpha)}\,.$$

Voici prouvé le lemme 5.

14. Conclusion du § 2. — Ce qu'affirme l'introduction, à savoir *la nécessité de l'hypothèse $\alpha \leqq p/q$ dans les théorèmes d'existence et d'unicité concernant l'équation hyperbolique non-stricte, est donc prouvé.*

Mais b a été choisi non réel.

§ 3. Choix d'un b réel

Si q est *pair*, on peut faire pour u et b un autre choix, *réel*, pour lequel subsistent les majorations des quasi-normes formelles employées ci-dessus et par suite les conclusions prouvées.

Indiquons rapidement ce choix.

15. Modifications a apporter au lemme 1. — *Modification à son énoncé.*

$$u(t, x) = e^l + e^m \sin(\omega x),\ b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 1\,.$$

Modification à sa preuve. —

$$u = e^l + e^m f(t) \sin(\omega x)$$

$$b = e^{m-l} \frac{d^p f}{dt^p} \sin(\omega x) \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right].$$

16. Modification au lemme 2. —

$$u(t, x) = e^l + e^n \sin(\omega x)\,, \quad b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 2.$$

Modification à sa preuve. —

$$u = e^l + e^{nf+m(1-f)} \sin(\omega x)$$

$$b = e^{-nf-m(1-f)} \frac{d^p\, e^{nf+m(1-f)}}{dt^p} \frac{1}{(i\omega)^q} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\,,$$

en supposant q *pair*.

17. Modification au lemme 3.

$$u(t, x) = e^{l'} + e^n \sin(\omega x), \quad b = 0 \text{ pour } t \text{ voisin de } 3.$$

[5]) car $\dfrac{x^s}{s!} < e^x$.

Modification à sa preuve. —

$$u = e^{l(1-f)+l'f} + e^n \sin(\omega x)$$

$$b = e^{-n} \frac{d^p e^{l(1-f)+l'f}}{dt^p} \left[\frac{1}{\omega} \cos(\omega x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right].$$

Bibliographie

[1] DE GIORGI: Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy. Università di Roma. Rend. Mat. **14**, 382—387 (1955).

[2] LERAY, J., et Y. OHYA: Systèmes linéaires, hyperboliques non-stricts. Colloque C.B.M., Louvain (1964).

[3] TALENTI, G.: Sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. **259**, 1932—1933 (1964).

(Reçu le 2 juillet 1965)