Séminaire BOURBAKI
(Mai 1951)

LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE CAUCHY ET DE DIRICHLET AU MOYEN DU CALCUL SYMBOLIQUE ET DES PROJECTIONS ORTHOGONALES ET OBLIQUES

par Jean LERAY.

I. CALCUL SYMBOLIQUE ; PROJECTIONS.

SOMMAIRE du I. - Le n° 1 définit un anneau E et un sous-anneau F de fonctions réelles, un anneau A et un sous-anneau B de fonctions holomorphes ; il définit sur ces anneaux diverses normes. Au n° 2 la transformation de Laplace et le théorème de Plancherel montrent que E est une algèbre sur B et F une algèbre sur A , ce qui définit le calcul symbolique. Le n° 3 définit des projections, qui ne commutent ni entre elles, ni avec les opérateurs (qui commutent entre eux) de calcul symbolique.

HISTORIQUE. - M. RIESZ et L. GÅRDING ont utilisé quelques opérateurs du calcul symbolique, H. WEYL, VISCHIK, GÅRDING ont utilisé des projections orthogonales ; pour la théorie des projections, voir J. DIXMIER.

1. Définition de deux anneaux fonctionnels et de leur topologie.

Données. - Nous nous donnons un espace vectoriel X sur le corps des nombres réels ($\dim X = \ell < \infty$) , son dual Ξ et, dans Ξ , un domaine convexe Γ .

Définition de l'anneau E et de son sous-anneau F. - Les fonctions $f(x)$ définies sur X et mesurables possèdent les normes

$$\| f(x) \|_n = \left[\int_X \int |f(x)|^n \, dx_1 \ldots dx_\ell \right]^{\frac{1}{n}} \quad ;$$

E sera l'ensemble des $f(x)$ telles que

$$\| e^{-\langle \xi , x \rangle} f(x) \|_2 < +\infty \qquad \text{pour tout } \xi \in \Gamma \quad ;$$

l'hypothèse que Γ est ouvert et l'inégalité de Schwarz montrent que

$$\| e^{-\langle \xi , x \rangle} f(x) \|_1 < +\infty \qquad \text{pour } f(x) \in E \, , \ \xi \in \Gamma \quad ;$$

donc, $*$ désignant le produit de composition,

$$f_1 * f_2 \in E \text{ si } f_1 \text{ et } f_2 \in E .$$

E , muni de ce produit, est donc un anneau. Les $f(x)$ dont les dérivées de tous ordres existent et appartiennent à E constituent un sous-anneau de E ; nous le notons F .

Nous utiliserons sur E la topologie borne supérieure des topologies définies sur les normes $\| e^{-\langle \xi , x\rangle} f(x) \|_2$, $\xi \in \Gamma$: relativement à cette topologie E est complet.

Définition de l'anneau A et de son sous-anneau B. - A est l'anneau que constituent les fonctions $a(\xi + i\eta)$ holomorphes dans le tube $(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Xi$ et inférieures à certaines puissances de $\|\eta\|$ pour $\xi \in$ partie compacte de Γ, $\|\eta\| \longrightarrow \infty$. On pose

$$\| a(\xi + i\eta) \|_n = \left[\int_{\Xi} \int |a(\xi + i\eta)|^n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\| a(\xi + i\eta) \|_{\infty} = \text{borne} \sup_{\eta \in \Xi} |a(\xi + i\eta)| \text{ , pour } \xi \text{ fixe.}$$

B est le sous-anneau de A constitué par les $a(\xi + i\eta)$ tels que $\| a(\xi + i\eta) \|_{\infty}$ est borné sur toute partie compacte de Γ .

Nota. - Dans A la multiplication est la multiplication numérique et non le produit de composition.

2. Le calcul symbolique.

D'après le théorème de Plancherel, la transformation de Laplace

$$\mathcal{L} : f(x) \longrightarrow a(\xi + i\eta) = (2\pi)^{-\frac{\ell}{2}} \int \ldots \int e^{-\langle \xi + i\eta , x\rangle} f(x) \, dx_1 \ldots dx_\ell$$

est un isomorphisme de E sur l'anneau constitué par les $a(\xi + i\eta)$ holomorphes dans le tube $\Gamma \times \Xi$ et tels que $\| a(\xi + i\eta) \|_2$ soit borné sur toute partie compacte de Γ ; or cet anneau est un idéal de B ; donc,

$$\text{si } f(x) \in E \text{ et } b(\xi + i\eta) \in B \text{ , alors } \mathcal{L}^{-1} (b. \mathcal{L} f) \in E \text{ ;}$$

$\mathcal{L}^{-1} (b. \mathcal{L} f)$ sera noté $b(p) \, f(x)$ et nommé produit symbolique de $f(x)$ par $b(p)$. En vertu de cette définition E est une algèbre sur B : $b(p) \in B$ est un opérateur linéaire de E tel que

$$b(p) \, [f_1(x) * f_2(x)] = [b(p) \, f_1(x)] * f_2(x) = f_1(x) * [b(p) \, f_2(x)] .$$

$$[b_1(p).b_2(p)]\, f(x) = b_1(p)\,[b_2(p)\ f(x)] = b_2(p)\,[b_1(p)\ f(x)]\ ;$$

$b(p)$ est continu et, plus précisément

$$(1)\quad \| e^{-\langle \xi , x \rangle} b(p)\ f(x) \|_2 \leqslant \| b(\xi + i\eta) \|_\infty \ .\ \| e^{-\langle \xi , x \rangle} f(x) \|_2$$

pour tout $\xi \in \Gamma$. On déduit de (1), ceci : si Γ n'est pas borné, la valeur de $b(p)\ f(x)$ au point x ne dépend que de la restriction de $f(x)$ à $x + C$, C étant l'adhérence de l'ensemble convexe ([1]) que constituent les points x tels que

$$\underset{\xi \in \Xi}{\text{borne inf}}\, [\log \| b(\xi + i\eta) \|_\infty - \langle \xi , x \rangle] \quad -\infty\ .$$

A chaque $b(p)$ correspond une distribution k telle que

$$b(p)\ f(x) = k * f\ ;$$

si $b(\xi) = 0$ est un cône algébrique sans singularité, k s'exprime à l'aide d'intégrales abéliennes (HERGLOTZ, BUREAU, PETROWSKY) ;

si $\| b(\xi + i\eta) \|_2 < \infty$, k est la fonction

$$(2)\quad k(x) = (2\pi)^{-\ell} \int_{\Xi} \cdots \int e^{\langle \xi + i\eta , x \rangle} a(\xi + i\eta)\ d\eta_1 \ldots d\eta_\ell \ .$$

REMARQUE 1. – Soit une fonction analytique $b(\xi)$; $\| b(\xi + i\eta) \|_n$ est une fonction convexe de ξ (HARDY), définie sur un ou plusieurs ensembles convexes disjoints : $\Gamma_1 , \ldots , \Gamma_\sigma$ (BOCHNER) ; notre hypothèse que Γ est convexe n'est donc pas restrictive ; mais, si $\sigma > 1$, le symbole $b(p)\ f(x)$ n'est défini sans ambiguïté que si l'on précise le choix de Γ en écrivant : $b(p)\ f(x)$ pour $p \in \Gamma_\alpha$.

EXEMPLE 1. – Soient un point a de coordonnées $a_1 , \ldots , a_\ell$ et une fonction $f(x_1 , \ldots , x_\ell)$ de carré sommable, nulle hors d'un compact :

$$e^{a_1 p_1 + \ldots + a_\ell p_\ell}\ f(x_1 , \ldots , x_\ell) = f(x_1 + a_1 , \ldots , x_\ell + a_\ell)\ ;$$

C est le point a .

EXEMPLE 2.

$$\frac{1}{p_1}\ f(x_1 , \ldots , x_\ell) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t , x_2 , \ldots , x_\ell)\ dt \quad \text{pour}\quad p_1 > 0\ ;$$

([1]) Cet ensemble est une réunion dénombrable d'ensembles fermés convexes.

$$= -\int_{x_1}^{+\infty} f(t,x_2,\ldots,x_\ell)dt \quad \text{pour} \quad p_1 < 0 .$$

REMARQUE 2. - L'adjoint de $a(p)$, pour la norme $\| e^{-\langle \xi,x\rangle} f(x) \|_2$ est $\overline{a(2\xi - p)}$.

REMARQUE 3. - Si $f(x) \in F$, alors $\mathcal{L}^{-1}(a,\mathcal{L}f)$ F quel que soit $a(\xi + i\eta) \in A$; donc F est une algèbre sur A : le produit symbolique $a(p)\ f(x)$ a un sens. Si $a(p)$ est un polynôme,

$$(3) \qquad a(p_1,\ldots,p_\ell)\ f(x) = a\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) f(x) \ ;$$

en particulier, si $a(p) = \langle p,a\rangle$ et $f(x) = \langle f,x\rangle$ sont linéaires et homogènes, alors : $a(p)\ f(x) = \langle f,a\rangle$.

3. Les projections.

On utilise sur E d'autres opérateurs que ceux du calcul symbolique : les projections, qui en général ne commutent ni entre elles ni avec les opérateurs du calcul symbolique.

DÉFINITION. - Une application linéaire ϖ de E en lui-même telle que $\varpi = \varpi^2$ est nommée projection de E sur ϖE parallèlement à $\varpi^{-1}(0)$.

Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de E ; pour qu'il existe une projection de E sur V parallèlement à W , il faut et il suffit que :

$$E = V \dotplus W \qquad \text{(somme directe)}.$$

EXISTENCE. - (cf. DIXMIER). Soit $\alpha_\xi(V,W)$ [soit $\alpha'_\xi(V,W)$] la borne inférieure des angles des droites de V et W [des droites orthogonales à V et à W] dans l'espace de Hilbert que constituent les fonctions $f(x)$ telles que $\| e^{-\langle \xi,x\rangle} f(x) \|_2 < \infty$; si V et W sont fermés dans E et si $\alpha_\xi(V,W)$ et $\alpha'_\xi(V,W)$ ont des bornes inférieures positives quand $\xi \in$ partie compacte de Γ, alors la projection ϖ de E sur V parallèlement à W existe ; elle est continue et plus précisément

$$(4) \quad \alpha_\xi(V,W) = \alpha'_\xi(V,W) \ ; \ \| e^{-\langle \xi,x\rangle} \varpi f(x) \|_2 \leqslant \frac{1}{\sin \alpha_\xi(V,W)} \| e^{-\langle \xi,x\rangle} f(x) \|_2$$

si $\xi \in \Gamma$.

II. LES PROBLÈMES AUX LIMITES.

SOMMAIRE du II : HISTORIQUE. - Le n° 1 attache à une variété algébrique $a(\xi)=0$ divers domaines convexes de Ξ : les Γ_α , qui régissent le problème de Cauchy ; les Δ_β , qui régissent le problème de Dirichlet. Le n° 2 retrouve et précise la solution du problème de Cauchy donnée par GÅRDING : GÅRDING envisage les cônes directeurs γ_α des Γ_α sans utiliser les Γ_α ; il ne peut donc pas obtenir l'inégalité (6). Le n° 3 définit des opérateurs des Green du type

$$a^{-\frac{1}{2}}(p)\,\varpi\, a^{-\frac{1}{2}}(p) \quad , \tag{8}$$

où ϖ est une projection [non nécessairement orthogonale comme chez H. WEYL, VISCHIK, GÅRDING, qui ont résolu divers problèmes self-adjoints sans utiliser ni le calcul symbolique, ni d'opérateur du type (8)] ; enfin le n° 3 étend l'alternative de Fredholm, pour les équations totalement elliptiques, aux domaines bornés. Les équations à coefficients variables ne sont pas étudiées ici ; les problèmes aux limites du type mixte non plus.

4. Définition de divers ensembles convexes attachés à la variété algébrique $a(\xi)=0$

Soit $a(\xi)$, où $\xi \in \Xi$, un polynôme à coefficients réels ; soit m son degré ; soit $a_m(\xi)$ l'ensemble de ses termes de degré m .

Envisageons les points $\xi \in \Xi$ tels que $a(\xi + i\eta) = 0$ pour au moins un $\eta \in \Xi$: ce sont les milieux des couples de points imaginaires conjugués de la variété algébrique $a(\xi + i\eta) = 0$; soient Γ_α les composantes convexes du complémentaire de l'ensemble de ces points ; vu n° 1, remarque 1 (BOCHNER), les Γ_α sont des domaines convexes à l'intérieur desquels $\| a^{-1}(\xi + i\eta) \|_\infty$ est borné ; $\mathring{\gamma}_\alpha$ désignera l'intérieur du cône directeur γ_α de Γ_α . Soit

$$2\omega(\xi) = \underset{\eta \in \Xi}{\text{oscillation}} \arg a(\xi + i\eta) \quad ;$$

les points des Γ_α en lesquels $2\omega(\xi) < \pi$ constituent des domaines convexes, notés Δ_β ; ils ne peuvent exister que pour m pair.

REMARQUE 1. - Les points ξ tels que toute droite passant par ξ coupe la variété $a(\xi + i\eta) = 0$ en des points tous réels constituent un ou plusieurs domaines Γ^*_α , dont les frontières font partie de cette variété et dans lesquels $\| a^{-1}(\xi + i\eta) \|_\infty = |a^{-1}(\xi)|$: chaque Γ^*_α est un Γ_α ; la réciproque est exacte quand $a(\xi)$ est homogène.

REMARQUE 2. – Tout $\mathring{\gamma}_\alpha$ associé à $a(\xi)$ est un Γ_α associé à $a_m(\xi)$; la réciproque est exacte, sauf si la variété $a(\xi+i\eta) = 0$ touche l'hyperplan de l'infini en un point réel.

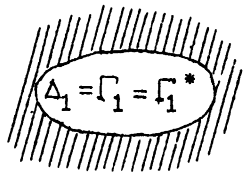
REMARQUE 3. – Si les singularités réelles de la variété $a(\xi) = 0$ ont une dimension $< \ell - 2$, alors le nombre des Γ^*_α est :

0, 1 ($\mathring{\gamma}^*_1$ vide) ou 2 ($\mathring{\gamma}^*_1$ et $\mathring{\gamma}^*_2$ opposés, non vides).

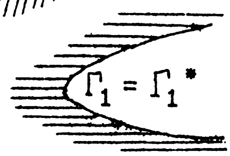
EXEMPLE. – Enumérons les Γ_α , Γ^*_α , Δ_β correspondant à diverses variétés $a(\xi) = 0$ pour $\ell = 2$ ou 3 .

1°. Ellipsoïde ou ellipse imaginaires, paraboloïde hyperbolique : aucun.

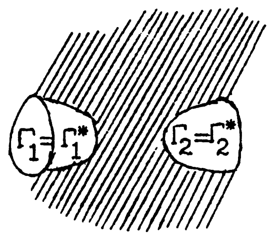
2°. Ellipsoïde ou ellipse réels :



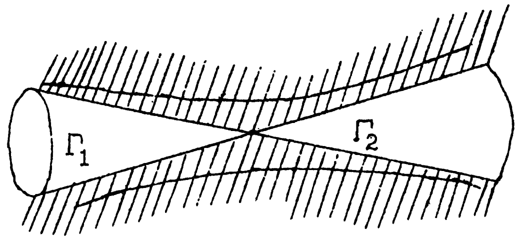
3°. Paraboloïde elliptique, parabole



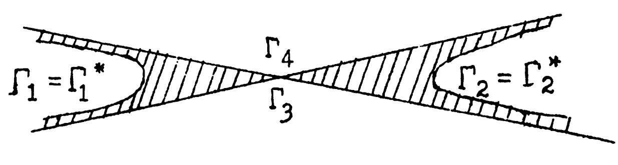
4°. Hyperboloïde à 2 nappes



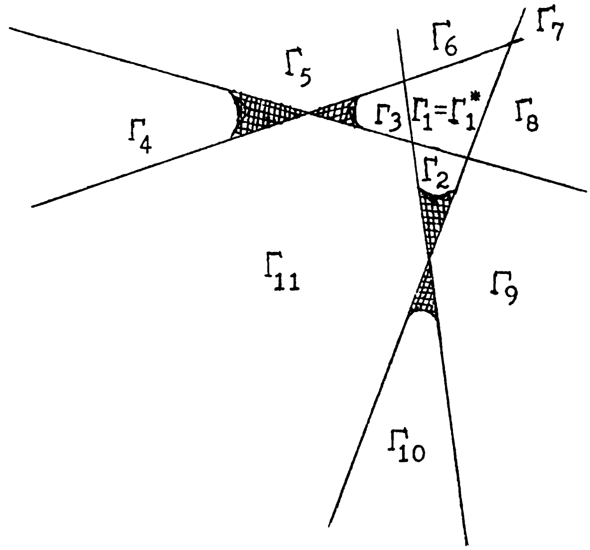
5°. Hyperboloïde à 1 nappe



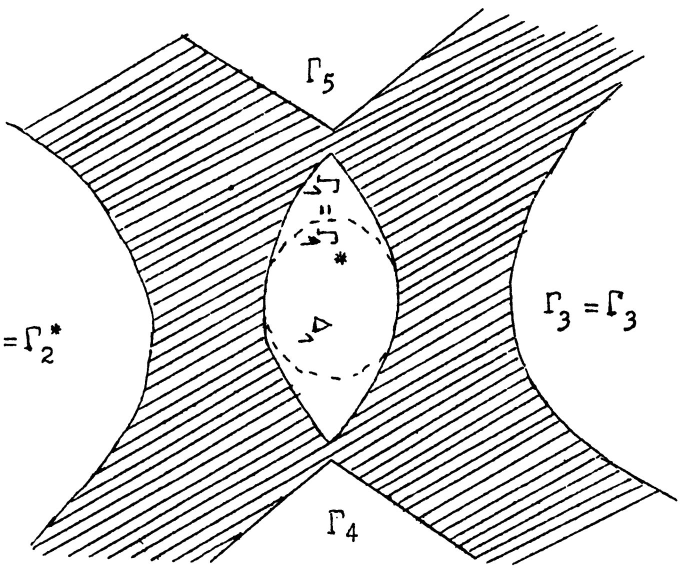
6° Hyperbole



7°. Deux hyperboles



8°. Deux hyperboles symétriques par rapport à 0.



5. Le problème de Cauchy.

Si $f(x)$ est nul hors d'un compact, l'équation d'inconnue $u(x)$

$$(5) \qquad a(p)\, u(x) = f(x)$$

possède une solution vérifiant

$$(6) \qquad \| e^{-\langle \xi , x \rangle} u(x) \|_2 < +\infty \quad \text{pour } \xi \in \Gamma_\alpha \ ;$$

c'est, d'après le n° 2,

$$(7) \qquad u(x) = a^{-1}(p)\, f(x) \quad \text{pour } p \in \Gamma_\alpha \ .$$

Si Γ_α n'est pas borné, la valeur au point x de $a^{-1}(p)\, f(x)$ pour $p \in \Gamma_\alpha$ ne dépend que des valeurs prises par $f(x)$ sur $x + C_\alpha$, C_α étant le cône dual de γ_α :

$$x \in C_\alpha \quad \text{signifie} \quad \langle \xi , x \rangle \leqslant 0 \quad \text{pour } \xi \in \gamma_\alpha \ .$$

Donc (7) est la solution d'un problème de Cauchy à données initiales nulles ; le cas de données initiales (2) non nulles s'y ramène aisément ; ainsi le nombre des problèmes de Cauchy toujours possibles est le nombre des Γ_α non bornés. L'unicité de la solution d'un de ces problèmes résulte, si $\mathring{\gamma}_\alpha$ n'est pas vide, de la résolution du problème de Cauchy pour l'équation adjointe. Rappelons que l'essentiel de ces résultats est dans L. GÅRDING [13] .

6. Problème de Dirichlet.

Choisissons pour Γ un domaine Δ_β ; posons $b = a^{-\frac{1}{2}}(p)$. Soit D un domaine de X ayant une frontière de mesure nulle ; soit L (et M) l'ensemble des $f(x) \in E$ nulles dans (hors de) D ; on peut déduire du n° 3 et de la définition de Δ_β qu'il existe une projection $\bar{\omega}$ de E sur $E \cap b^{-1}(L)$, parallèlement à l'adhérence de $b(M)$; posons

$$(8) \qquad g = b\, \bar{\omega}\, b \ ;$$

g est continu et plus précisément

$$\| e^{-\langle \xi , x \rangle} g\, f(x) \|_2 \leqslant \frac{\| a^{-1}(\xi + i\eta) \|_\infty}{\sin \omega(\xi)} \, \| e^{-\langle \xi , x \rangle} f(x) \|_2 \quad \text{si } \xi \in \Delta_\beta \ ;$$

---

(2) Ces données sont portées par une hypersurface dont les hyperplans tangents ont des directions $\in \mathring{\gamma}_\alpha$.

g sera nommé opérateur de Green relatif à D et $a(p)$; en effet, si $f(x) \in E$, alors $u(x) = g\, f(x) \in E$ vérifie :

$$(9) \qquad a^{\frac{1}{2}}(p)\, u(x) \in E \;, \; u(x) = 0 \text{ hors de } D, \quad a(p)\, u(x) = f(x) \quad \text{dans } D\,.$$

(Les deux premières conditions généralisent les conditions classiques : $u(x)$ et ses dérivées d'ordre $< \frac{m}{2}$ s'annulent sur la frontière de D). g résout donc un problème de Dirichlet : il existe autant de problèmes de Dirichlet toujours possibles que de domaines Δ_β. L'exemple 8 du n° 4, où $a_m(\xi) > 0$, est celui d'une équation pour laquelle un problème de Dirichlet et quatre problèmes de Cauchy sont toujours possibles ; chacun de ces problèmes a une solution unique.

Supposons D borné : g est complètement continu et indépendant du choix de Δ_β ; supposons $a_m(\xi) > 0$ pour $\xi \neq 0$: $a(\xi) + c$ possède un Δ_β quand la constante c est voisine de 1^m ; donc, vu l'extension due à F. RIESZ de la théorie des équations linéaires de Fredholm, il existe une fonction $u(x)$ vérifiant (9), sauf dans les cas exceptionnels où, pour $f(x) = 0$, (9) a une solution $u(x) \neq 0$.

Si $a(p)$ est self-adjoint, g l'est et ϖ est une projection orthogonale, comme chez H. WEYL, VISCHIK et GÅRDING [12].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (Salomon). - Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals, Amer. J. Math., t. 59, 1937, p. 732-738.

[2] BOCHNER (S.) and MARTIN (W.T.). - Several complex variables. - Princeton, Princeton University Press, 1948 (Princeton mathematical Series n° 10), Chap. V.

[3] BUREAU (Florent). - Le problème de Cauchy et la théorie de la propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins homogènes et uniaxes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 225, 1947, p. 402-403.

[4] BUREAU (Florent). - Le problème de Cauchy pour une équation linéaire aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre 4 et à 4 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 379-402.

[5] BUREAU (Florent). - Sur la solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre 4 et à 3 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 473-484.

[6] BUREAU (Florent). - Sur le problème de Cauchy pour les équations linéaires à un nombre impair de variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 587-610.

[7] BUREAU (Flórent). - Sur la solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles à 4 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 684-711 et 827-853.

[8] BUREAU (Florent). - Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre plus grand que 2 et à 4 variables indépendantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 150-152.

[9] BUREAU (Florent). - Sur l'intégration des équations de propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins uniaxes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1331-1333.

[10] BUREAU (Florent). - La solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles décomposables et totalement hyperboliques d'ordre 4 à 4 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 34, 1948, p. 566-592.

[11] DIXMIER (Jacques). - Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications, Bull. Soc. math. France, t. 77, 1949, p. 11-101.

[12] GÅRDING (Lars). - Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques homogènes à coefficients constants, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 1030-1032.

[13] GÅRDING (Lars). - Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., t. 85, 1951, p. 1-62.

[14] HARDY (G.H.). - The mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 269-277.

[15] HARDY (G.H.), INGHAM (A.E.) and POLYA (G.). - Notes on moduli and mean values, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 27, 1927, p. 401-409.

[16] HERGLOTZ (G.). - Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, I, II, Berichte Leipzig, t. 78, 1926, p. 93-126 et 287-318.

[17] PETROWSKY (I.). - Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, Mat. Sbornik, N.S., t. 2 (44), 1937, p. 815-868.

[18] PETROWSKY (I.). - On the diffusion of wawes and the lacunas for hyperbolic equations, Mat. Sbornik, N.S., t. 17 (32), 1945, p. 289-370.

[19] RIESZ (Friedrich). - Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math., t. 41, 1918, p. 71-98.

[20] RIESZ (Marcel). - L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., t. 81, 1948, p. 1-223.

[21] VIŠIK (M. I.). - Metod ortogonal'nykh i prjamykh razloženij v teorii elliptičeskikh differencial'nykh uravnenij, Mat. Sbornik, N.S., t. 25 (67), 1949, p. 189-234.

[22] WEYL (Hermann). - The method of orthogonal projection in potential theory, Duke math. J., t. 7, 1940, p. 411-444.

ADDITIF

Publications postérieures à l'Exposé :

LERAY (Jean). - Hyperbolic differential equations. - [Princeton, Institute for advanced Study,] First part, p. 1-103.

SCHWARTZ (Laurent). - Transformation de Laplace des distributions, Communications du Séminaire mathématique de l'Université de Lund, tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz. - Lund, Gleerup, 1952, p. 196-206.

[Juin 1957]