Séminaire BOURBAKI
12e année 1959/60, n° 202

Mai 1960

LE PROBLÈME DE CAUCHY DANS LE CAS ANALYTIQUE LINÉAIRE

par Jean LERAY

Introduction.

Soit une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$\frac{d^2\, y(x)}{dx^2} + a(x)\; y(x) = b(x) \qquad ,$$

(x : variable numérique ; a et b : fonctions numériques analytiques données ; $y(x)$: fonction numérique inconnue).

Les résultats suivants sont classiques :

- La connaissance de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, $\frac{d^2 y}{dx^2} + ay = 0$, permet de construire la solution élémentaire, et, à l'aide de quadratures, l'intégrale générale de l'équation avec second membre ;
- Les points singuliers de la fonction inconnue $y(x)$ sont points singuliers des fonctions données $a(x)$ et $b(x)$.

Ces résultats s'étendent aux équations aux dérivées partielles analytiques linéaires :

- Une fois construite la solution du problème de Cauchy le plus simple (second membre, b , égal à 1 ; données de Cauchy nulles sur un hyperplan arbitraire) on peut en déduire par quadratures, la solution élémentaire et la solution de tout problème de Cauchy ;
- les singularités de la solution sont sur les caractéristiques issues des singularités des données et sur la caractéristique tangente à la variété portant les données de Cauchy ;

l'allure de la solution sur ses singularités s'obtient par quadrature.

Cette conférence a pour seul objet les quelques détails techniques par lesquels il est nécessaire de préciser les énoncés précédents.

1. Uniformisation de la solution du problème de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy

1. Notations.

X est une variété analytique complexe ; $\dim X = \ell$; x est un point de X ;

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j_1+\dots\leqslant m} a_{j_1 j_2 \dots}(x) \frac{\partial^{j_1+\dots}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots}$$

est un opérateur différentiel linéaire à coefficients holomorphes ; son ordre est m. On se donne une fonction holomorphe numérique $v(x)$ et, sur une sous-variété analytique de codimension 1 :

$$S : \quad s(x) = 0$$

des données de Cauchy holomorphes (c'est-à-dire une fonction holomorphe modulo $s^m(x)$). Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction numérique analytique $u(x)$ prenant sur S ces données de Cauchy et vérifiant, près de S, l'équation

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x})\, u(x) = v(x) \qquad (v \text{ donné}) \quad .$$

2. Caractéristiques et bicaractéristiques.

Notons (x, p) un élément de contact d'ordre 1 de X : x est un point de X, p est un covecteur en ce point. Cet élément de contact appartient à S, si

$$s(x) = 0 \,, \quad p \text{ est parallèle à } s_x \text{ (gradient de } s\text{)} \quad .$$

Notons $g(x, p)$ la partie principale de $a(x, p)$:

$$g(x, p) = \sum_{j_1+\dots=m} a_{j_1 j_2 \dots}(x)\, p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots$$

Un point x de S est dit caractéristique quand

$$g(x, s_x) = 0 \quad .$$

On nomme bicaractéristique toute famille à un paramètre d'éléments de contact vérifiant le système différentiel

$$\frac{dx_1}{g_{p_1}(x, p)} = \frac{dx_2}{g_{p_2}} = \dots = -\frac{dp_1}{g_{x_1}} = -\frac{dp_2}{g_{x_2}} = \dots \,, \quad g(x, p) = 0 \quad .$$

On démontre (théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires du 1er ordre $\subset$ théorie des invariants intégraux) que les bicaractéristiques issues des éléments de contact caractéristiques de S sont les éléments de contact d'une sous-variété K de X ; évidemment :

codim $K = 1$; K est <u>tangent</u> à S ; K est une <u>caractéristique</u> ,

c'est-à-dire : l'équation $k = 0$ de K vérifie $g(x\ ,\ k_x) = 0$.

On suppose que S n'est pas une caractéristique.

3. <u>L'uniformisation</u>.

Soient Φ une variété analytique complexe de même dimension que X , Σ une sous-variété de Φ analytiquement homéomorphe à S et $x(\varphi)$ une application holomorphe de Φ dans X , dont la restriction à Σ soit l'homéomorphisme donné de Σ sur S et dont le déterminant fonctionnel $\frac{D(\varphi)}{D(x)}$ ne soit pas identiquement nul : il s'annule sur une partie Δ de Φ .

Nous dirons qu'<u>une fonction analytique</u> $u(x)$ <u>est uniformisée près de</u> S <u>par la projection</u> $x(\varphi)$ lorsque $u(x(\varphi))$ est une fonction de $\varphi \in \Phi$ holomorphe au voisinage de Σ .

THÉORÈME d'uniformisation. - <u>La solution du problème de Cauchy et ses dérivées d'ordres</u> $< m$ <u>peuvent être uniformisées par une projection, qui projette</u> Δ <u>sur</u> K.

NOTE 3.1. - On peut construire une telle projection , la projection caractéristique, à l'aide d'un système différentiel choisi de façon à englober les équations des bicaractéristiques et à posséder des invariants intégraux appropriés; alors : Φ est fibré ; sa fibre est un voisinage de l'origine du plan complexe ; sa base est Σ , qu'on identifie à S ; soit $y(\varphi) \in S$ le point de base de $\varphi \in \Phi$; pour que $\varphi \in \Delta$, il faut et il suffit que y soit point caractéristique de S ; plus précisément $\frac{1}{g(y\ ,\ s_y)}\frac{D(x)}{D(\varphi)}$ est holomorphe sur Φ .

NOTE 3.2. - Sous des hypothèses très générales :
K est un ensemble analytique ; Φ est un revêtement fini de X , ramifié audessus de K ; $u(x)$ est algébroïde.

NOTE 3.3. - Sous des hypothèse assez générales :
K est une variété analytique : $k(x) = 0$; $u(x)$ est une fonction holomorphe de x et $\sqrt{k(x)}$; c'est donc une fonction analytique de x ayant deux déterminations.

4. Preuve.

Le théorème de Cauchy-Kowalewski construit $u(x)$ près des points non caractéristiques de S. Comme l'ont fait SCHAUDER et PETROWSKY, on précise dans quel domaine, en appliquant à la fonction majorante le théorème sur les singularités des solutions des équations différentielles ordinaires. On peut alors effectuer un prolongement analytique de $u(x)$. Sous les hypothèses qu'emploie la note 3.3, on constate que $u(x)$ est fonction holomorphe de x et $\sqrt{k(x)}$. On en déduit que la projection caractéristique $x(\varphi)$ l'uniformise. Il est alors évident que les singularités de la fonction holomorphe $u(x(\varphi))$ ont une trop petite dimension pour exister. Bibliographie : [1]. Mais, ne pourrait-on pas construire $u(x)$ plus simplement et plus explicitement et obtenir en même temps que le théorème d'uniformisation [1] l'allure de $u(x)$ sur sa singularité K [7] ?

2. La solution unitaire.

5. Définition.

Nous supposons X affine : les fonctions linéaires

$$\xi.x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots$$

sont définies sur X ; elles constituent un espace vectoriel Ξ : $\xi \in \Xi$.

Nous nommons solution unitaire de $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ la solution $U(\xi, y)$ du problème de Cauchy

$$a(y, \frac{\partial}{\partial y})\, U(\xi, y) = 1 \qquad ;$$

$U(\xi, y)$ s'annule m fois pour $\xi.y = 0$.

6. Uniformisation de la solution unitaire.

Considérons le système d'Hamilton

$$dx_j = g_{\xi_j}(x, \xi)\, dt, \quad d\xi_j = -g_{x_j}(x, \xi)\, dt, \qquad (j = 1, \dots, \ell)$$

$$d\xi_0 = [\sum_j x_j\, g_{x_j} - g]\, dt \qquad ;$$

il admet les intégrales premières

$$\xi.x + (1-m)t\, g(x, \xi), \quad g(x, \xi)$$

et la forme différentielle invariante

$$(d\xi).x + g(x , \xi)\, dt \qquad ;$$

il est le système caractéristique de l'équation de Jacobi

$$V(x) + (1 - m)\, g(x , V_x) = 0 \qquad .$$

(Ces équations d'Hamilton et Jacobi sont les équations classiques de la mécanique analytique).

Donnons-nous un point y de X , un point η de Ξ vérifiant $\eta.y = 0$ et un paramètre numérique complexe t ; notons

$$\xi(t , \eta , y) , \qquad x(t , \eta , y) \qquad (\eta.y = 0)$$

la solution du système d'Hamilton vérifiant

$$\xi(0 , \eta , y) = \eta , \qquad x(0 , \eta , y) = y \qquad .$$

THÉORÈME d'uniformisation. - $\xi(t , \eta , y)$ uniformise $U(\xi , y)$ et toutes ses dérivées d'ordres $< m$.

Ce n'est qu'un corollaire du théorème d'uniformisation précédent.

7. Réciprocité de la solution unitaire.

Etant donné un polynôme en ξ

$$a(\xi , x) = \sum_{j_1+j_2+\dots\leq m} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots a_{j_1 j_2 \dots}(x) \qquad ,$$

définissons l'opérateur $a(\frac{\partial}{\partial x} , x)$ comme suit :

$$a(\frac{\partial}{\partial x} , x)\, u = \sum_{j_1+j_2+\dots\leq m} \frac{\partial^{j_1+j_2+\dots}}{\partial x_1^{j_1}\, \partial x_2^{j_2} \dots} [a_{j_1 j_2 \dots}(x)\, u(x)] \qquad .$$

Rappelons que, si nous notons

$$a^*(\xi , x) = a(x , - \xi) \qquad ,$$

alors l'adjoint (RIEMANN) de $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ est $a^*(\frac{\partial}{\partial x} , x)$; il a mêmes caractéristiques que a .

Supposons $a(x , \xi)$ polynôme en x et ξ ; notons n le plus petit entier, tel que

$$A(x_0 , x_1 , x_2 , \dots , \xi) = x_0^n\, a(\frac{x}{x_0} , x_0\, \xi) \qquad [x = (x_1 , x_2 , \dots)]$$

soit un polynôme en x_0 , x_1 , ... , ξ ; nommons <u>transformé de Laplace</u> de $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ l'opérateur

$$A(-\frac{\partial}{\partial \xi} , \xi) = A(-\frac{\partial}{\partial \xi_0} , -\frac{\partial}{\partial \xi_1} , -\frac{\partial}{\partial \xi_2} , \ldots , \xi)$$

qui est homogène et d'ordre $m + n$. Il a mêmes bicaractéristiques que a ; ses caractéristiques se déduisent de celles de a par une transformation de contact de Legendre.

Notons $U^*(\xi , y)$ la solution unitaire de $a^*(\frac{\partial}{\partial x} , x)$; elle est homogène en ξ de degré 0 ; notons : $U^*_{-n}(\xi , y)$ la solution unitaire homogène de $A(-\frac{\partial}{\partial \xi} , \xi)$, c'est-à-dire la fonction, homogène en ξ de degré n que définit le problème de Cauchy :

$$A(-\frac{\partial}{\partial \xi} , \xi) \, U^*_{-n}(\xi , y) = 1 \quad ,$$

$U^*_{-n}(\xi , y)$ s'annule $m + n$ fois pour $\xi . y = 0$.

THÉORÈME de réciprocité. - $(-\frac{\partial}{\partial \xi_0})^{\pm n}$ <u>transforme l'une en l'autre la solution unitaire de l'adjoint de</u> $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ <u>et la solution unitaire homogène du transformé de Laplace de</u> $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$:

$$U^*_{-n} = (-\frac{\partial}{\partial \xi_0})^{-n} U^* \quad \underline{\text{si}} \quad n < 0 \; ; \qquad U^* = (-\frac{\partial}{\partial \xi_0})^{n} U^*_{-n} \quad \underline{\text{si}} \quad n \geqslant 0 \quad .$$

Nous noterons

$$U_r = (-\frac{\partial}{\partial \xi_0})^r U \; , \qquad U^*_r = (-\frac{\partial}{\partial \xi_0})^r U^* \quad .$$

8. <u>Déterminer explicitement la solution unitaire</u> est donc possible pour les opérateurs $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ dont
les coefficients <u>d'ordres</u> m , $m - 1$, $< m - 1$ sont <u>linéaires</u>, <u>constants</u>, <u>nuls</u> : $A(-\frac{\partial}{\partial \xi} , \xi)$ est un opérateur linéaire du premier ordre ; U^*_{-n} résulte de quadratures le long des bicaractéristiques.

Par exemple, si $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ est linéaire en x , homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$, alors

$$U^*_m(\xi , y) \frac{D(\xi_0 , \xi_1 , \xi_2 , \ldots)}{D(t , \eta_1 , \eta_2 , \ldots)} = -1$$

quand $\xi_j = \xi_j(t , \eta_1 , \eta_2 , \ldots , y)$ est défini par le système d'Hamilton comme l'explique le n° 6.

NOTE. - La formule précédente simplifie la définition de $\mathcal{L}[U^*]$ (n° 11).

Bibliographie : [2].

3. La solution élémentaire.

9. On sait que la solution élémentaire de $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ est une fonction ou distribution $E(x , y)$ vérifiant les équations

$$a(x , \frac{\partial}{\partial x})\, E(x , y) = \delta(x - y) , \quad a^*(\frac{\partial}{\partial y} , y)\, E(x , y) = \delta(x - y)$$

(δ : mesure de Dirac) .

Si a est hyperbolique, on exige que E s'annule quand x est dans un demi-espace dont la frontière est un hyperplan spatial passant par y : $E(x , y)$ est alors défini sans ambiguité.

10. Transformation de la solution unitaire en la solution élémentaire.

Le n° 11 construira une transformation $\mathcal{L}$ dont voici les propriétés :

- $\mathcal{L}$ prolonge la transformation classique de Laplace ;
- $\mathcal{L}$ opère sur les fonctions $f(\xi , y)$, homogènes en ξ et uniformisables, comme l'est $U(\xi , y)$;

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\xi_j\, f] \qquad (j = 1 , 2 , \ldots)$$

$$(n - \ell - 1 - \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j})\, \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\xi_0\, f] \qquad (- n \text{ degré homogénéité de } f) \quad ,$$

$$x_j\, \mathcal{L}[f] = - \mathcal{L}[\frac{\partial f}{\partial \xi_j}] , \qquad \mathcal{L}[f] = - \mathcal{L}[\frac{\partial f}{\partial \xi_0}]$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\frac{\partial f}{\partial y_j}] ; \qquad \mathcal{L}[1] = \delta(x - y) \quad ;$$

nous ne précisons pas ici les conditions de validité de ces formules, ni la définition de $\mathcal{L}$ pour $x = y$, ni les hypothèses très strictes à faire sur a dans le théorème suivant :

THÉORÈME. - $E(x , y) = \mathcal{L}[U^*(\xi , y)]$.

PREUVE. - $a^*(y , \frac{\partial}{\partial y})\, \mathcal{L}[U^*(\xi , y)] = \mathcal{L}[a^*\, U^*] = \mathcal{L}[1] = \delta(x - y)$; si $a(x , \xi)$ est un polynôme en x et ξ ,

$$a(x , \frac{\partial}{\partial x})\, \mathcal{L}[U^*(\xi , y)] = a\mathcal{L}[U^*_{-n}] = \mathcal{L}[A(- \frac{\partial}{\partial \xi} , \xi)\, U^*_{-n}] = \mathcal{L}[1] = \delta(x - y) \quad .$$

NOTE. - Quand U^* est connu (n° 8), E s'obtient donc par quadratures.

Ce théorème et les propriétés de $\mathfrak{L}$ ont pour corollaires :

<u>Allure de</u> $E(x, y)$ <u>pour</u> $x = y$:

$$\mathfrak{L}[f] = O(|x - y|^{m-\ell}) \quad \text{si } m \geqslant \ell = \dim X \quad ;$$

$$\mathfrak{L}[f] \text{ est une distribution d'ordre } \ell - m \quad \text{si } \ell > m \quad .$$

<u>Allure de</u> $E(x, y)$ <u>pour</u> $x \neq y$: $E(x, y)$ est holomorphe quand $x \notin K(y)$, conoïde caractéristique de sommet y. Si x est voisin d'un point de $K(y) - y$, où l'équation de $K(y)$ est $k(x, y) = 0$, alors

$$\mathfrak{L}[f] = H_o(x, y)\, h_{m-1-\frac{\ell}{2}}[k(x, y)] + H_1(x, y)$$

où H_o et H_1 sont holomorphes,

$$h_p[k] = \operatorname{Re} \frac{k^p}{\Gamma(p+1)}, \text{ si } p + \frac{1}{2} = \text{entier } \geqslant 0 \;;$$

$$= \frac{k^p}{p!} \frac{1}{2\pi}[\log|k| - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{p}]$$

ou

$$= \frac{k^p}{p!} \frac{1}{2} \operatorname{signe}(k), \text{ si } p = \text{entier } > 0 \quad ,$$

(c'est le signe d'une courbure totale qui indique le choix à faire) ; si $p < -\frac{1}{2}$, $h_p[k]$ est une distribution définie par

$$\frac{d}{dk} h_{p+1}[k] = h_p[k] \quad .$$

NOTE. - On peut calculer explicitement $H_o(x, y)$ pour $x \in K(y)$.

<u>Allure de</u> $E(x, y)$ <u>pour</u> x <u>complexe</u> : $E(x, y)$ est une fonction analytique <u>zétafuchsienne</u> : toutes ses déterminations sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un nombre fini d'entre elles ; ce nombre $\leqslant (m-1)^{\ell-1}$.

11. <u>Définition de la transformation</u> $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ opère sur des fonctions analytiques $f(\xi, y)$, homogènes en ξ ; n désignera le degré d'homogénéité de f. On suppose ces fonctions uniformisables par des projections $\xi(t, \eta, y)$ du type suivant :

$$\xi(0, \eta, y) = \eta \quad \text{et} \quad \eta \cdot y = 0 \quad ;$$

quel que soit le nombre complexe θ,

$$\xi(\theta^{1-m} t, \theta\eta, y) = \theta\xi(t, \eta, y) \quad (m : \text{entier } > 0) \quad ;$$

$\xi(t, \eta, y)$ et $f(\xi(t, \eta, y), y)$ sont des fonctions holomorphes de (t, η, y) quand $|t|.\|\eta\|^{m-1}$ est petit. La transformée $\mathfrak{L}[f]$ d'une telle fonction f est une fonction ou distribution de (x, y) définie, pour $x \neq y$, par l'intégrale, où figure un résidu [3] si $n \leqslant \ell$:

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{\ell-1}} \int_{h(\tilde{\Phi},\tilde{x})} \frac{(\xi.x)^{n-\ell-1}}{(n-\ell-1)!} f(\xi, y)\, \omega^*(\xi) \qquad \text{si} \quad \ell < n \quad ,$$

$$= \frac{(-1)^{n-\ell+1}}{(2\pi i)^{\ell-1}} \int_{h(\tilde{x})} \frac{d^{\ell-n}[f(\xi, y)\, \omega^*(\xi)]}{(d\xi.x)^{1+\ell-n}} \qquad \text{si} \quad n \leqslant \ell \quad ;$$

$$\omega^*(\xi) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j\, \xi_j\, d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_{j-1} \wedge d\xi_{j+1} \wedge \dots \wedge d\xi_\ell \quad ;$$

Φ désigne l'espace de coordonnées $(t, \eta_1, \dots, \eta_\ell)$, $|t|\ \|\eta\|^{m-1}$ petit ; $\tilde{\Phi}$ est son quotient par le groupe à un paramètre des transformations

$$\theta : \ (t, \eta) \to \theta(t, \eta) = (\theta^{1-m} t, \theta\eta) \quad :$$

les points (t, η) et $\theta(t, \eta)$ de Φ ont même image dans $\tilde{\Phi}$. La forme $(\xi.x)^{n-\ell-1} f(\xi, y)\, \omega^*(\xi)$, où $\xi = \xi(t, \eta, y)$, $dy = 0$, ne change pas quand on y remplace ξ par $\theta\xi$, donc (t, η) par $\theta(t, \eta)$: elle est donc définie sur $\tilde{\Phi}$;

$\tilde{x}$ désigne la sous-variété de $\tilde{\Phi}$ d'équation

$$\tilde{x} : \ \xi(t, \eta, y).x = 0 \quad ;$$

$h(\tilde{x})$ est une classe d'homologie compacte de cette variété ; $h(\tilde{\Phi}, \tilde{x})$ est la classe d'homologie compacte de $\tilde{\Phi}$ relativement à $\tilde{x}$ qui a pour bord $h(\tilde{x})$ et qui s'annule pour $x = y$. Les deux formules précédentes ont donc un sens, la seconde en vertu de [3].

Il reste à définir $h(\tilde{x})$; voici, quand ℓ est impair, l'une de ses définitions : $h(\tilde{x})$ contient un cycle somme de trois chaînes :

- la partie réelle de $\tilde{x}$, munie d'une orientation qui change pour $t = 0$;
- une chaîne située dans la partie de $\tilde{x}$ où $t = 0$;
- une chaîne située dans la partie de $\tilde{x}$ située à la frontière de $\tilde{\Phi}$ $(|t|\ \|\eta\|^{m-1} = \text{Cte})$.

On suppose x voisin de y. Bibliographie : [4] et [5].

4. Le problème de Cauchy.

Quand les données de Cauchy sont nulles et que le second membre est v (voir n° 1), on construit la solution du problème de Cauchy en transformant $U^*(\xi , y)\, v(y)$ par une transformation J qui prolonge la convolution par une transformée de Laplace de la même façon que $\mathcal{L}$ prolonge la transformation de Laplace. On peut alors étudier les singularités issues de celles des données et l'allure de la solution sur ses singularités.

Bibliographie : [6].

5. Partie principale de la singularité de la solution.

On la calcule dans l'ordre qui précède : sur la caractéristique tangente à la variété portant les données de Cauchy, pour la solution unitaire, etc. On emploie un invariant intégral bien classique : une densité, vérifiant la loi de conservation de la masse, des particules dont le mouvement est représenté par les bicaractéristiques.

Cet invariant intégral est celui qui intervient dans l'étude des paquets d'ondes, c'est-à-dire des relations existant entre les mécaniques ondulatoire et corpusculaire [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] LERAY (Jean). - Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 389-429.

[2] LERAY (Jean). - Solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire (Problème de Cauchy, II), Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 75-96.

[3] LERAY (Jean). - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.

[4] LERAY (Jean). - Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire, Cours du Collège de France, 1er semestre 1960 ; C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960 (à paraître) ; Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961 (Problème de Cauchy IV, à paraître).

[5] GÅRDING (L.) et LERAY (J.). - Une transformation du type de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur différentiel en sa solution élémentaire (à paraître).

[6] Pour des indications rudimentaires :

LERAY (Jean). - Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynômiaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 242, 1956, p. 953-956.

Pour une théorie plus détaillée :

LERAY (Jean). - Cours faits au Collège de France, au Canada, à Rome (multigraphiés).

et Problème de Cauchy V, à paraître.

[7] LERAY (Jean). - Cours oraux non publiés ; Problème de Cauchy VI, à paraître.