Supposons que S soit susceptible d'une déformation continue avec conservation du réseau conjugué u, v et de plus que $\theta_4 = R$ soit une solution transformatrice de Bianchi; S′ se déforme avec S dans les mêmes conditions. Ayant pris $\theta_4 = R$, les réseaux sont perspectifs et le demeurent au cours de la déformation en jeu car les équations ponctuelles de Laplace se conservent. Soient

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + R = 0, \qquad \bar{\theta}_1 x + \bar{\theta}_2 y + \bar{\theta}_3 z + \bar{\theta}_4 = 0$$

les plans tangents à S et à l'une de ses déformées S′, la solution transformatrice R demeurant invariante au cours de la déformation, les résultats qui précèdent montrent que $\bar{\theta}_4 = CR$ où C est une fonction du paramètre de déformation.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le système d'équations aux dérivées partielles qui régit l'écoulement permanent des fluides visqueux.* Note de M. **J. Leray**.

1. Nous nous proposons d'étudier, en tant que fonction du paramètre K, la solution du système de Navier

$$\mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \mathop{\mathrm{S}}_{k=1,2,3} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + K \rho X_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k=1,2,3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \tag{2}$$

$$u_i = K \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Les relations (1) et (2) doivent être satisfaites à l'intérieur d'un domaine borné Π, les relations (3) sur la frontière Σ de ce domaine; Σ se compose de p surfaces $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$, dont les rayons de courbure ont une borne inférieure positive.

Un Mémoire récent d'Odqvist (*Mathematische Zeitschrift*, 32, 1930, p. 329) prouve que ce système équivaut à un système d'équations intégrales non linéaires auquel on peut appliquer les théorèmes de Schmidt (*Mathematische Annalen*, 65, 1908, p. 370). Les résultats ainsi obtenus sont strictement locaux : ils concernent les solutions voisines d'une solution donnée.

Nous allons indiquer comment on peut les compléter dans le cas particulier où le flux du vecteur α_i à travers chacune des surfaces Σ_r est nul.

2. On établira d'abord que toutes les solutions du système (1), (2), (3)

satisfont une même inégalité

$$(4)\qquad \underset{i,k}{\mathrm{S}}\iiint_{\Pi}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]^2 dx_1\,dx_2\,dx_3 < \mathrm{B}(\mathrm{K})$$

[le symbole B(K) désignant diverses fonctions de K qui restent bornées sur tout intervalle borné de variation de K].

A cet effet on considère l'ensemble des vecteurs définis dans Π, y ayant une divergence nulle et qui coïncident avec (α_i) sur Σ; soit (γ_i) l'un quelconque d'entre eux. On déduit de (1), (2), (3) l'équation

$$(5)\qquad \mu\underset{i,k}{\mathrm{S}}\iiint_{\Pi}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]^2 dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$= \mathrm{K}\rho\iiint_{\Pi}\underset{i,k}{\mathrm{S}}\, u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\gamma_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \mathrm{K}\mu\iiint_{\Pi}\underset{i,k}{\mathrm{S}}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$-\mathrm{K}\rho\iiint_{\Pi}\underset{i}{\mathrm{S}}\, u_i\mathrm{X}_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \mathrm{K}^2\rho\iiint_{\Pi}\underset{i}{\mathrm{S}}\,\mathrm{X}_i\gamma_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$-\frac{\mathrm{K}^3}{2}\rho\iint_{\Pi}[\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2][\gamma_1\,dx_2\,dx_3+\gamma_2\,dx_3\,dx_1+\gamma_3\,dx_1\,dx_2].$$

On fait alors l'hypothèse, qu'on veut prouver être absurde : il existe un ensemble borné de valeurs de K et un ensemble infini de solutions correspondantes, telles que les quantités

$$\mathrm{N}^2 = \underset{i,k}{\mathrm{S}}\iiint_{\Pi}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3$$

ne soient pas bornées supérieurement.

On extrait de cet ensemble une suite dénombrable pour laquelle N augmente indéfiniment, K tend vers une limite H et chacune des fonctions $\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ converge en moyenne, faiblement, vers une fonction de carré sommable $\mathrm{U}_{i,k}$ (Riesz, *Mathematische Annalen*, 69, 1910, p. 464). Dans ces conditions $\frac{1}{\mathrm{N}}u_i$ converge en moyenne, fortement, vers une fonction de carré sommable U_i; et la relation (5) nous donne à la limite

$$(6)\qquad \underset{i,k}{\mathrm{S}}\iiint_{\Pi}\gamma_i\mathrm{U}_k\mathrm{U}_{i,k}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{\mu}{\rho\mathrm{H}}.$$

On démontre qu'une telle condition ne peut être satisfaite par tous les champs de vecteurs (γ_i). La preuve par l'absurde de la relation (4) est alors achevée.

3. Si l'on majore à l'aide de (4) les seconds membres des relations (1), on obtient, grâce aux résultats d'Odqvist, une majorante plus précise que (4). En poursuivant de façon analogue on prouve successivement que

$$|u_i| < B(K), \qquad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right| < B(K),$$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x'_k}\right| < B(K) \times \left[\sum_k (x_k - x'_k)^2\right]^{\frac{h}{2}} \qquad (0 < h < 1).$$

Par suite, *de tout ensemble de solutions du système* (1), (2), (3) *correspondant à un ensemble borné de valeurs de* K *on peut extraire une suite convergeant uniformément. La limite est une solution du système.*

4. Il est dès lors possible de transposer les raisonnements par lesquels, après en avoir effectué l'étude locale, on achève l'étude des fonctions réelles $y(x)$ que définit une relation implicite $F(x, y) = 0$. Notons que pour $K = 0$ notre problème admet une seule solution (nulle) et qu'il ne s'y produit pas de bifurcation. Nous examinons donc un cas comparable au suivant : $F(x, y)$ est un polynome dont le monome de plus haut degré en y est y^{2m+1}; l'équation $F(0, y) = 0$ n'a qu'une racine réelle : la racine simple $y = 0$. Contentons-nous d'énoncer les conclusions suivantes :

Les valeurs singulières de K, qui peuvent apparaître, sont dénombrables et ne s'accumulent pas à distance finie. Lorsque K varie continûment sans les traverser, le *nombre des solutions réelles du système* reste constant; il *est impair* (*donc non nul*); ces solutions sont alors des fonctions holomorphes de K.

5. On peut compléter ces résultats en examinant comment se comportent les solutions du système (1), (2), (3) lorsque les surfaces Σ_r se modifient continûment ou lorsque la frontière extérieure de Π s'éloigne indéfiniment, le vecteur (α_i) y restant constant.

Les propriétés que nous venons d'énoncer sont intimement liées à l'existence d'une fonction *positive* de dissipation de l'énergie : aussi des raisonnements analogues aux précédents peuvent-ils être appliqués à d'autres problèmes, notamment à ceux que pose l'Hydrodynamique.