ayant exactement ν racines intérieures à D [les points de D, où $\varphi(z)=\varphi(a)$] et, en vertu de $|\varphi(a)|<1$, étant holomorphe dans D et de module constant égal à 1 sur l, satisfait (pour $n=\nu$) à la relation (1) avec le signe d'égalité.

3. Soit maintenant

$$a_0(z)+a_1(z)\,\omega(z)+\ldots+a_p(z)\,\omega(z)^p+\ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances d'un polynome

$$\omega(z)=(z-\zeta_1)\ldots(z-\zeta_k),$$

les $a_p(z)$ étant des polynomes de degré $k-1$ au plus. Si cette série converge pour $|\omega(z)|<R$, elle converge uniformément pour $|\omega(z)|\leqq\nu<R$ et y représente une fonction $f(z)$, holomorphe dans chaque partie D simplement connexe de la lemniscate $|\omega(z)|\leqq\nu$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de $f(z)$ dans

$$|\omega(z)|\leqq\nu \qquad (z_\nu\neq\zeta_\mu;\ \nu=1,\ \ldots,\ n;\ \mu=1,\ \ldots,\ k).$$

Une application (réitérée si nécessaire) de (1) donne

$$\nu^n\left|\frac{a_0(\zeta_1)\ldots a_0(\zeta_k)}{\omega(z_1)\ldots\omega(z_n)}\right|\leqq\max_{|\omega(z)|=\nu}|f(z)|^k,$$

ce qui est une extension ([1]) de l'inégalité de Jensen à la série de puissances généralisée.

De même, par un choix convenable de $\varphi(z)$ dans l'égalité (3), on obtient une extension de la formule de Poisson-Jensen pour les séries de polynomes considérées.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certaines classes d'équations intégrales non linéaires.* Note de M. **J. Leray**, présentée par M. Henri Villat.

1. Soit une équation du type étudié par M. Schmidt (*Mathematische Annalen*, 65, 1908, p. 370); elle dépend de paramètres $\lambda, \mu, \ldots$; φ désigne la fonction inconnue; les solutions *voisines* d'une solution donnée sont fonctions algébroïdes de $\lambda, \mu, \ldots$. Soit un ensemble de valeurs des paramètres formant un continu C; pour que les solutions correspondantes constituent sur C une ou plusieurs fonctions algébroïdes finies de $\lambda, \mu, \ldots$, il

---

([1]) La possibilité d'une telle extension et son rôle dans l'étude des fonctions entières m'a été signalée par M. B. Amira.

faut et il suffit que ces solutions forment sur C un ensemble compact, c'est-à-dire qu'elles possèdent une égale continuité. Donnons de cette remarque deux applications bien simples, relatives au domaine réel :

Soit l'équation

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}[x, s, \varphi(s)]\,ds+\mu.g(x), \tag{1}$$

où $\mathrm{K}[x, s, u]$ est borné et analytique par rapport à u; le nombre des solutions est (en général) impair, donc non nul.

Soit l'équation

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}(x, s)\times \mathrm{F}[\varphi(s)]\,ds+\mu.g(x), \tag{2}$$

où $\lambda>0$, $0<\alpha<\mathrm{K}(x, s)<\beta$; $\gamma<\mathrm{F}(u)$, α, β, γ représentant des constantes; $\mathrm{F}(u)$ est analytique; $u^{-1}\mathrm{F}(u)$ augmente indéfiniment quand u tend vers $+\infty$. Le nombre des solutions est (en général) pair; il est nul sur une région du plan (λ, μ); une solution au moins est non bornée quand λ tend vers zéro.

Le problème des régimes permanents des fluides visqueux occupant un domaine π borné constitue un troisième exemple, singulièrement plus intéressant (*Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1180).

2. Le cas où π s'étend à l'infini peut s'étudier à partir du précédent : on éloigne indéfiniment la frontière extérieure; le problème continue à admettre au moins une solution. Mais les hypothèses de M. Schmidt ne sont plus vérifiées; et je ne sais si l'ensemble des solutions constitue encore une fonction algébroïde des données.

Plus généralement des problèmes de la nature suivante sont fréquents ; on ne parvient pas à les étudier par l'emploi conjugué des deux théorèmes de M. Schmidt et de M. Arzelà utilisés au paragraphe 1, mais des problèmes voisins peuvent l'être; et un passage à la limite fournit des renseignements relatifs à l'ensemble de toutes les solutions de l'équation proposée. Ces renseignements n'excluent pas la possibilité des singularités les plus diverses, et dans certains cas banaux l'on peut vérifier que ces singularités se présentent effectivement.

L'Hydrodynamique offre les exemples les plus intéressants de telles difficultés : Soit un liquide visqueux plan [1], enfermé à l'intérieur d'une

---

[1] J'utilise l'étude des mouvements infiniment lents que j'ai résumée dans une Note des *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 1165.

courbe convexe fixe, et qui y adhère; l'état des vitesses est donné pour $t=0$. Je n'ai pas réussi à construire une solution des équations de Navier régulière pour $0 \leqq t < +\infty$. Il est vrai qu'il suffirait, pour y réussir, d'améliorer légèrement certaines inégalités. J'ai alors recherché des *solutions turbulentes* du problème : je nomme ainsi tout système de fonctions u, v qui satisfont d'une part quelques inégalités (exprimant, entre autres choses, que l'énergie cinétique totale est bornée) et d'autre part l'équation intégrale que M. Oseen préfère substituer au système de Navier (*Hydrodynamik*, Leipzig, 1927, p. 58); je n'ai même pas supposé u et v dérivables au sens classique du terme. J'ai établi l'existence d'au moins une solution turbulente. De plus j'ai prouvé que toute solution turbulente coïncide avec la solution régulière que la méthode des approximations successives définit au voisinage de l'époque initiale, tant qu'existe cette solution régulière; enfin toute solution turbulente est régulière, sauf pour un ensemble de valeurs de t qui est fermé et de mesure nulle.

3. Cherchons maintenant à établir l'existence d'un mouvement régulier, pour $0 \leqq t < +\infty$, en ce qui concerne un liquide visqueux, illimité, à trois dimensions, dont l'état des vitesses est donné pour $t=0$: nous constatons être beaucoup plus loin du but; nous préciserons dans une prochaine Note la première difficulté qui se présente. Nous y dirons aussi comment le problème analogue, à deux dimensions, ne réserve aucune surprise, même si l'on passe au cas d'un liquide parfait. (Ce dernier fait résulte du théorème d'Helmholtz, relatif à la conservation du tourbillon.)

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'analogie entre la distribution des droites de Julia des fonctions holomorphes et celle des points singuliers des fonctions analytiques.* Note de M. **Vladimir Bernstein**, présentée par M. Hadamard.

Dans une Note récente [1], j'ai énoncé, à titre d'hypothèse, une proposition relative à la distribution des droites de Julia des fonctions entières, et j'ai indiqué que j'avais pu démontrer cette proposition pour certaines classes de fonctions entières. J'ai indiqué, en me bornant au cas des fonctions d'ordre un et de type moyen, que si l'on considère une telle fonction entière $F(z)=\Sigma a_n z^n$, et si la fonction associée de M. Borel $\varphi(x)=\Sigma n! a_n x^n$

[1] *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 350.