En introduisant $T(r)$ au lieu de $\log M(r)$ dans (1), on peut définir les directions de Borel d'ordre précisé $\rho(r)$ pour les fonctions méromorphes (comparer la Note citée de M. Valiron) et étendre les résultats précédents aux fonctions méromorphes qui ont une valeur asymptotique au sens large.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les mouvements des liquides illimités.* Note [1] de M. J. **Leray**, présentée par M. Henri Villat.

Nous développons ci-dessous des résultats qui complètent ceux que nous avons donnés dans une Note des *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1628.

1. *Liquides visqueux à trois dimensions.* — Soient ρ la densité, μ le coefficient de viscosité. Supposons qu'on puisse trouver une constante α et quatre fonctions U_1, U_2, U_3, P qui soient définies en tout point (X_1, X_2, X_3) de l'espace et qui vérifient le système

$$(1) \qquad \mu\,\Delta U_i - \alpha\rho\left[U_i + \sum_k X_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k}\right] - \frac{\partial P}{\partial X_i} = \rho \sum_k U_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k}; \qquad \sum_k \frac{\partial U_k}{\partial X_k} = 0.$$

Intégrons sur tout l'espace la relation

$$\mu \sum_i U_i\,\Delta U_i - \alpha\rho \sum_i U_i\left[U_i + \sum_k X_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k}\right] - \sum_i U_i \frac{\partial P}{\partial X_i} = \rho \sum_{i,k} U_i U_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k}.$$

On constate que α est positif si P, U_i et leurs dérivées premières tendent vers zéro assez rapidement quand le point (X_1, X_2, X_3) s'éloigne à l'infini. Dans ces conditions les fonctions

$$(2) \qquad u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha t}}\,U_i\left[\frac{x_1}{\sqrt{-2\alpha t}}, \frac{x_2}{\sqrt{-2\alpha t}}, \frac{x_3}{\sqrt{-2\alpha t}}\right]$$

définiraient un mouvement de liquide visqueux irrégulier pour $t=0$; le problème d'intégrer les équations de Navier, sachant qu'à l'instant $t=-1/2\alpha$ l'état des vitesses est $u_i = U_i[x_1, x_2, x_3]$, n'admettrait pas de solution régulière pour toute valeur de t; mais une « solution turbulente » serait évidente; elle serait définie par (2) pour $t<0$; ce serait le repos pour $t>0$.

2. *Liquide parfait à deux dimensions.* — Il s'agit de déterminer le mouvement connaissant l'état des vitesses à l'instant $t=0$; on suppose bornés, à cet instant, le tourbillon et la somme de son module étendue à tout le plan.

[1] Séance du 23 mai 1932.

Les positions d'une molécule aux instants o et t se correspondent par une transformation bicontinue du plan en lui-même, $T(t)$, qui doit conserver les aires; l'état du tourbillon à l'instant t doit se déduire de l'état initial par la transformation $T(t)$. Supposons qu'il s'en déduise par la transformation $T(\tau)$, τ étant celui des multiples d'une constante donnée ε qui appartient à l'intervalle (o, t) et qui est le plus proche de t; ce nouveau problème s'intègre facilement : un premier système différentiel détermine les trajectoires des molécules pour $o \leqq t \leqq \varepsilon$; un second pour $\varepsilon \leqq t \leqq 2\varepsilon$, etc. Faisons tendre ε vers zéro; nous obtenons à la limite une solution du problème étudié, qui est définie pour $-\infty < t < +\infty$. L'unicité de la solution et sa continuité par rapport aux conditions initiales s'établissent aisément. Un domaine tourbillonnaire ne peut se scinder, ni deux domaines tourbillonnaires se rencontrer; les molécules en lesquelles le tourbillon est continu sont les mêmes aux divers instants; celles en lesquelles il satisfait une condition de Hölder d'exposant donné sont également les mêmes aux divers instants, etc. Si le tourbillon est à l'instant initial une fonction mesurable partout discontinue, les termes des équations d'Euler :

$$(3) \qquad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

n'ont plus aucun sens; seules sont vérifiées des équations intégrales résultant de (3); nous dirons que les fonctions que nous venons de construire constituent alors une solution turbulente de (3), car c'est dans des circonstances très analogues que nous avons déjà employé cette locution. Indiquons la possibilité d'utiliser d'autres hypothèses concernant l'état initial : par exemple, la vitesse, le tourbillon et l'énergie cinétique totale bornés.

3. *Liquides visqueux à deux dimensions.* — Imposons aux conditions initiales les mêmes restrictions qu'au début du paragraphe 2; développons une étude analogue à la précédente, laquelle imite d'ailleurs l'intégration des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz. Nous obtenons aisément une solution des équations de Navier, qui est régulière et définie pour toutes les valeurs positives de t; l'unicité, la continuité par rapport aux données restent assurées. Si l'on fait tendre vers zéro le coefficient de viscosité, cette solution tend vers une limite et le théorème d'existence du paragraphe 2 se trouve établi à nouveau.

On peut donner une deuxième démonstration de la régularité du mouvement des liquides visqueux, illimités, à deux dimensions; elle utilise la relation de dissipation de l'énergie et diverses inégalités qui en résultent. Elle nécessite d'assez longs développements. Mais cette deuxième méthode s'applique à des conditions initiales différentes des précédentes; et c'est elle qui permet d'étudier les solutions turbulentes dans le problème des liquides plans, visqueux, limités par des parois.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Calcul d'une limite supérieure de la durée de la détonation dans les moteurs à explosion et explication de la présence d'une lacune dans les diagrammes fournis par certains manographes électriques.* Note de M. **Max Serruys.**

On sait qu'en raison de leur inertie, la plupart des manographes actuellement existants sont incapables de fournir des renseignements précis sur les variations de la pression pendant la période de la combustion dans les moteurs à explosion et, *a fortiori*, de nous renseigner sur la durée réelle du phénomène du cognement. On verra dans les lignes qui suivent comment nous sommes parvenus à déterminer expérimentalement une limite supérieure de la durée de la surpression correspondant au cognement, en mesurant l'impulsion communiquée par celle-ci à une pièce très légère.

Au cours d'essais entrepris pour le Service des Recherches de l'Aéronautique, en vue de vérifier la valeur des indications fournies par un manographe électrique du type Farnboro, nous avons été amenés à attacher une assez grande importance à la lacune, que présente toujours la courbe enregistrée, au voisinage du maximum de pression.

Voici l'explication que nous avons trouvée de ce fait et le calcul qui nous en a permis la vérification.

Supposant connu le fonctionnement de l'appareil (schéma *fig.* 1), considérons ce qui se passe pour une valeur donnée de la contre-pression (*fig.* 2) : à chaque cycle, la soupape S quitte son siège inférieur au moment où la pression variable à mesurer dépasse la valeur correspondant à l'ordonnée EF, ce qui provoque l'inscription du point E avec un retard que nous avons trouvé négligeable à l'échelle du diagramme ; mais il est nécessaire, pour qu'un point F de la courbe des pressions décroissantes s'inscrive réellement, que l'impulsion reçue pendant le temps EF par la soupape S lui permette d'atteindre le siège supérieur et qu'elle soit en outre demeurée en contact avec celui-ci pendant le temps τ indispensable pour que le courant primaire prenne la valeur minimum nécessaire au fonctionnement de l'éclateur. (Si le simple rebondissement de la soupape sur son