lier, aux cas simples où

$$\rho_n < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \qquad \rho_n < \frac{1}{\sqrt{n}(\operatorname{Log} n)^{1+\varepsilon}},$$

ε étant positif.

S'il était possible d'affirmer l'existence de la constante D dont il est question dans la Note citée ci-dessus, notre théorème s'appliquerait à toutes les séries de carré sommable, sans faire d'hypothèse particulière sur le reste de $\Sigma\rho_n^2$. Il suffirait, en posant

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} \rho_p^2 = \frac{1}{\Omega(n)},$$

de choisir les n_k de façon à rendre convergente la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Omega(n_k)}}$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Topologie et équations fonctionnelles.* Note de MM. **Jean Leray** et **Jules Schauder**, présentée par M. Henri Villat.

1. Soit un espace abstrait, $\mathcal{E}$, normé, linéaire et complet (1); un ensemble ouvert (2), ω de $\mathcal{E}$; enfin une transformation fonctionnelle,

$$y = x - \mathcal{F}(x) = \Phi(x) \tag{1}$$

définie sur $\overline{\omega}$; $\mathcal{F}(x)$ *n'est pas supposée linéaire*, mais est supposée *complètement continue* (3) (vollstetig), et ne doit prendre que des valeurs appartenant à $\mathcal{E}$. Nous avons pu définir, en accord avec les célèbres travaux de M. Brouwer (4), le degré topologique, $d[\Phi, \omega, b]$ de la transformation Φ en un point b étranger à $\Phi(\omega')$, en sorte que les propriétés bien connues de ce degré continuent à être exactes. Indiquons brièvement notre définition : nous supposons b en o; nous posons

$$h = \text{minimum de la distance de o à } \Phi(\omega');$$

(1) Au sens de M. Banach (cf. *Fund. Math.*, 3, 1919, p. 133-181).

(2) Nous désignerons par ω' la frontière de ω; par $\overline{\omega} = \omega + \omega'$ son ensemble de fermeture.

(3) C'est-à-dire $\mathcal{F}(x)$ est continue et $\mathcal{F}(x)$ transforme tout ensemble borné en un ensemble compact.

(4) *Math. Annalen*, 71, 1924, p. 97-115.

nous envisageons l'une des transformations fonctionnelles $\mathcal{F}_h(x)$ qui approchent $\mathcal{F}(x)$ à h près et dont toutes les valeurs font partie d'un même sous-ensemble linéaire de $\mathcal{E}$, à nombre fini de dimensions n; soit ω_n l'intersection, supposée non vide, de ω par ce sous-ensemble; soit $\Phi_h(x) = x - \mathcal{F}_h(x)$; nous posons

$$d[\Phi, \omega, 0] = d[\Phi_h, \omega_n, 0]$$

(la définition de ce deuxième degré résulte des travaux de M. Brouwer), en démontrant que le choix de Φ_h et ω_n n'affecte pas la valeur de $d[\Phi, \omega, 0]$.

2. Nous nommons *indice total* des solutions de l'équation

$$x - \mathcal{F}(x) = 0 \tag{2}$$

qui sont contenues dans ω le degré en o de la transformation (1).

Théorème. — Supposons que l'équation (2) dépende continûment [1] d'un paramètre k variable sur un segment K de l'axe réel. Soit un ensemble ouvert et borné Ω de l'espace [2] $[\mathcal{E}_x K]$, tel que $\mathcal{F}$ soit définie sur $\overline{\Omega}$ et que Ω' ne contienne aucune solution de (1). Alors l'indice total [3] des solutions intérieures à Ω est le même pour toutes les valeurs de k. Il en résulte que *l'existence d'au moins une solution de* (2) est assurée pour chaque valeur de k *quand on connaît un point de* K *où cet indice total diffère de zéro.*

3. Le champ *d'applications de ce théorème d'existence* est vaste, il contient en particulier les problèmes aux limites relatifs aux équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique : nous avons réussi à généraliser des théorèmes d'existence bien connus de M. S. Bernstein [4]. Bornons-nous ici au problème de Dirichlet concernant l'équation quasi linéaire

---

(1) $\mathcal{F}(x)$, qui est complètement continue en x, est supposée uniformément continue en k.

(2) $[\mathcal{E} \times K]$, espace produit des espaces $\mathcal{E}$ et K, est l'ensemble des couples (x, k) d'éléments x de $\mathcal{E}$, k de K. Un point γ intérieur à un ensemble E de $[\mathcal{E} \times K]$ est un point tel que tout point de $[\mathcal{E} \times K]$ suffisamment voisin de γ appartient à E : l'ensemble ouvert Ω peut contenir des points (x, k) tels que k soit une extrémité de K.

(3) Si à une valeur de k ne correspond aucun point intérieur à Ω, alors l'indice total est par définition zéro.

(4) Voir *Encyclopädie der Math. Wissenschaft*, *Analysis*, II, C.12, p. 1327-1328. M. Bernstein fait des hypothèses entraînant l'unicité de la solution des problèmes qu'il se pose; notre théorie permet de s'en libérer; c'est ainsi que M. Bernstein étudie l'équation (5) dans le cas où z n'y figure pas.

du type elliptique :

$$(3)\qquad \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,n}} \mathrm{A}_{ij}\left[x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; k\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{D}\left[x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{d x_n}; k\right];$$

les valeurs frontières de z sont supposées données en fonction de k. Nous avons réussi [1] comme suit à transformer le problème en une équation fonctionnelle, $z = \mathrm{Z}(z, h)$, *qui soit du type* (1) : nous avons introduit la fonction Z qui satisfait les conditions aux limites données et l'équation

$$(4)\qquad \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,n}} \mathrm{A}_{ij}\left[x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; k\right]\frac{\partial^2 \mathrm{Z}}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{D}\left[x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; k\right].$$

D'où, en particulier, les résultats suivants :

Théorème. — *Si* K *contient un point* k_0 *en lequel*

$$\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n; k_0] \equiv 0$$

si les dérivées $\partial z/\partial x_i$ *de toutes les solutions de* (3) *qui correspondent aux divers points de* k *restent bornées et satisfont* [2] *dans leur ensemble à une même condition de Hölder; alors le problème de Dirichlet considéré possède une solution quelle que soit la valeur de* k *dans* K [3].

Corollaire. — Le problème de Dirichlet concernant le cercle et l'équation du type elliptique :

$$(5)\qquad \mathrm{A}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \mathrm{C}(\ldots)\frac{\partial z^2}{\partial y^2} = 0$$

admet toujours au moins une solution.

Les considérations s'appliquent aussi aux équations elliptiques les plus générales.

---

(1) Nous avons eu besoin de théorèmes que M. Schauder publiera incessamment dans la *Math. Zeitschrift*.

(2) Dans le cas où $n = 2$ nous avons seulement besoin de savoir que les dérivées $\partial z/\partial x_i$ sont bornées dans leur ensemble.

(3) Nous utilisons le théorème de M. Rado sur les Sattelfunktionen (*Act. Lit. Ac. Scient.*, 4, 1924-1926, p. 228-253; Von Neumann, *Abh. d. Math. Sem. Hamburg*, 8, 1931, p. 28-31).