CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Les prix Nobel en* 1935.

2° F. H. van den Dungen. *Acoustique des salles.*

3° Raymond Defay. *Étude thermodynamique de la tension superficielle.* Préface de Th. De Donder.

4° Robert Lévi. *Étude relative au contact des roues sur le rail.* (Présenté par M. Maurice d'Ocagne.)

M. le **Général commandant l'École Polytechnique** adresse un Rapport sur l'emploi qui a été fait de la subvention accordée sur la *Fondation Loutreuil* en 1934.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Topologie des espaces abstraits de M. Banach.* Note (¹) de M. **Jean Leray**, présentée par M. Henri Villat.

On peut apporter les compléments ci-dessous à notre travail fait en commun avec M. J. Schauder (²).

Notations. — Les transformations dont il s'agira opèrent sur un espace linéaire, normé et complet $\mathcal{E}$; elles sont du type $y = x + \mathcal{F}(x)$, $\mathcal{F}(x)$ étant complètement continue. ω désignera un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathcal{E}$; ω' sa frontière, $\overline{\omega} = \omega + \omega'$ son ensemble de fermeture. Soit une transformation $y = \Phi(x)$, dont ω est le champ de définition; soit e un point ou un ensemble connexe étranger à $\Phi(\omega')$; $[\Phi, \omega, e]$ désignera le degré topologique de Φ sur e.

1. Degré topologique du produit de deux transformations Φ et Ψ. — Φ est définie sur $\overline{\omega}$, Ψ sur (³) $\Phi(\overline{\omega})$; soient d les domaines bornés que $\Phi(\omega')$

(¹) Séance du 18 mars 1935.

(²) *Annales scient. de l'École Normale supérieure*, 51, 1934, p. 45.

(³) Nous étendons à tout l'espace le champ de définition de Ψ. Si d n'appartient pas à $\Phi(\overline{\omega})$, le terme correspondant dans (1) est nul.

détermine dans $\mathcal{E}$. *On a en tout point c étranger à* $\Psi\Phi(\omega')$.

$$[\Psi\Phi, \omega, c] = \sum_{(d)} [\Phi, \omega, d].[\Psi, d, c], \tag{1}$$

les termes non nuls de cette somme étant en nombre fini.

La formule (1) se vérifie aisément quand $\mathcal{E}$ est euclidien, et que Φ et Ψ sont simpliciales. On peut donc la déduire du lemme que voici.

Lemme. — *Soient* Φ^* *et* Ψ^* *deux suites de transformations qui convergent uniformément vers* Φ *et* Ψ, *le champ de définition de* Φ^* *étant* $\overline{\omega}$. *Je dis que* (1) *est vérifiée lorsque la formule analogue* (1*), *qui concerne* Φ^* *et* Ψ^*, *est vérifiée.*

Bien que $\Psi^*\Phi^*(x)$ ne converge pas uniformément vers $\Psi\Phi(x)$ les premiers membres de (1*) et (1) sont égaux à partir d'un certain rang.

Les points b tels que $\Psi(b) = c$ constituent un ensemble compact B; soit $2l$ la distance de B à $\Phi(\omega')$; les points dont la distance à B est inférieure à l constituent des domaines V_i, en nombre fini. Pour $\|\Phi^*(x) - \Phi(x)\| < l$, les V_i sont étrangers à $\Phi^*(\omega')$; on prouve par l'absurde qu'à partir d'un certain rang les V_i contiennent tous les points b^* tels que $\Psi^*(b^*) = c$. Les seconds membres de (1*) et (1) valent alors respectivement

$$\sum_i [\Phi^*, \omega, V_i].[\Psi^*, V_i, c] \quad \text{et} \quad \sum_i [\Phi, \omega, V_i].[\Psi, V_i, c];$$

ils sont donc égaux à partir d'un certain rang.

2. Invariance du domaine [1]. — *Si* D *est un domaine borné, si* Φ *est biunivoque sur* $\overline{D}$, *alors le degré de* Φ *est constant sur* $\Phi(D)$, *il vaut* ± 1, $\Phi(D)$ *est un domaine*, $\Phi(D')$ *en est frontière.*

Démonstration. — Soit Ψ l'inverse de Φ; soit d le domaine déterminé par $\Phi(D')$ qui contient $\Phi(D)$; (1) se réduit à

$$1 = [\Phi, D, d].[\Psi, d, D];$$

donc $[\Phi, D, d] = \pm 1$. Par suite $\Phi(D) \equiv d$. D'autre part tout point de $\Phi(D')$ est limite de points de $\Phi(D)$.

3. Invariance du nombre des domaines que délimite un ensemble fermé. —

(1) M. Schauder a établi ce théorème sous des hypothèses un peu plus strictes (*Math. Ann.*, 106, 1932, p. 667); la démonstration que j'expose ici a les rapports les plus étroits avec la sienne. M. Schauder a en outre montré comment ce théorème trouvait des applications intéressantes dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Soient deux ensembles fermés et bornés F *et* f *entre lesquels existe une homéomorphie telle que, si* x *et* y *sont les points homologues de cette homéomorphie, l'ensemble des vecteurs* $y-x$ *soit compact* (¹). *Soient* D *et* d *les domaines bornés que* F *et* f *déterminent dans* $\mathcal{E}$. *Le nombre* (²) *des domaines* D *est égal à celui domaines* d.

Étendons à tout l'espace $\mathcal{E}$ les champs de définition respectifs des correspondances $y(x)$ et $x(y)$; soient $y=\Phi(x)$ et $x=\Psi(y)$ les transformations obtenues (³), qui en général ne sont pas inverses l'une de l'autre. Si D_i et D_j sont deux domaines D, nous avons (⁴), d'après (1),

$$(2)\qquad \delta_{ij}=\sum_{(d)}[\Phi,\, D_i,\, d].[\Psi,\, d,\, D_j]\qquad (\delta_{ii}=1;\quad \delta_{ij}=0 \text{ si } i\neq j).$$

Considérons m domaines $D: D_1 \ldots D_m$; les domaines d tels qu'on n'ait pas $[\Psi, d, D_j]=0$ pour $j=1, \ldots, m$ sont en nombre au moins égal à m; sinon les relations (2) seraient impossibles : en particulier le nombre total des domaines d ne peut pas être inférieur à celui des domaines D. C. Q. F. D.

4. Généralisation. — On peut étendre cette étude à des espaces abstraits $\mathcal{E}$ non linéaires : il suffit de substituer aux translations les homéomorphies de $\mathcal{E}$. Quelques hypothèses, concernant le groupe de ces homéomorphies, sont nécessaires; nous les expliciterons ultérieurement.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'application d'un principe général de développement des fonctions d'une variable, aux séries de fonctions de Bessel.* Note de M. **Jean Delsarte**, présentée par M. Henri Villat.

Nous avons indiqué (⁵) une méthode générale de développement des fonctions de variable réelle en série de fonctions entières, et nous en

(¹) Du paragraphe 2 résulte que les points intérieurs de F et f sont homologues, de même que ceux de leurs points frontières qui sont limites de points intérieurs, de même que ceux de leurs points frontières qui ne sont pas limites de points intérieurs.

(²) Ce nombre est fini ou infini. On peut même établir que l'ensemble des domaines D et celui des domaines d sont simultanément dénombrables.

(³) Les quantités $[\Phi, D, d]$ et $[\Psi, d, D]$ sont indépendantes de la façon particulière dont on a étendu les champs de définition des correspondances $y(x)$ et $x(y)$ pour définir les transformations $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$.

(⁴) En effet, $\Psi\Phi(x)$ se confond avec l'identité sur F; or, deux transformations définies sur un même ensemble $\bar{\omega}$ et identiques sur ω' ont même degré en tout point.

(⁵) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 625.