Cette remarque nous conduit à définir une nouvelle famille de courbes sur le conoïde.

Par une génératrice, au sommet, d'un paraboloïde Π_{+k}, homofocal du paraboloïde de base Π, on fait passer un plan variable, et l'on détermine son intersection avec la génératrice, normale, à distance finie, du paraboloïde Π_{-k}; le lieu de cette intersection est une cubique gauche, qui décrit le conoïde quand le paraboloïde Π_{+k} varie.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz; théorie des sillages et des proues.* Note de M. **Jean Leray**, présentée par M. Henri Villat.

1. *Validité des solutions du problème de la proue.* — Une solution de ce problème n'est acceptable que si elle vérifie les deux conditions de M. Brillouin : $|df/dz|$ vaut au plus 1; les arcs $\widehat{B_0B}$ et $\widehat{CC_0}$ sont extérieurs au domaine (d).

Les méthodes de M. Villat fournissent aisément des sillages de la nature suivante : l'obstacle est symétrique et convexe, sa courbure croît quand on se rapproche de son milieu; les détachements sont en proue; au voisinage des points de détachement aucune des deux conditions de M. Brillouin n'est vérifiée.

Nommons *accolades* (¹) les obstacles $\widehat{B_0C_0}$ constitués par deux arcs concaves $\widehat{B_1A}$, $\widehat{AC_1}$, et par deux arcs convexes $\widehat{B_0B_1}$, $\widehat{C_1C_0}$, qui, parcourus de B_0 vers B_1, de C_0 vers C_1, ont des courbures non croissantes; le point A peut être anguleux. *Une solution du problème de la proue est toujours acceptable quand l'obstacle est une accolade, si le courant bifurque en* A.

La démonstration est élémentaire : on pose $df/dz = e^{-i\omega}$, $d\omega/df = U + iV$; on a, si R est le rayon de courbure, l l'arc de l'obstacle, $d(RU) + V\,dl = 0$; on étudie les régions où U et V gardent des signes constants; on constate

(¹) Les obstacles concaves et les obstacles circulaires convexes sont les formes extrêmes de l'accolade.

que le maximum de la vitesse n'est pas réalisé le long de l'obstacle et que la courbure U des lignes libres croît à mesure qu'on se rapproche des points de détachement.

2. *Cas où la solution du problème du sillage est unique.* — Ce problème est régi par l'équation intégro-différentielle de M. Villat, dont l'équation aux variations est compliquée, mais équivaut au « problème de Weinstein » (1) : construire dans un domaine Δ une fonction harmonique β connaissant les valeurs de β sur une portion Δ'_1 de la frontière Δ' de Δ, les valeurs de $1/\beta . d\beta/dn$ sur le reste Δ'_2 de Δ', et l'allure de β en certains points de Δ'. Faisons l'hypothèse de Friedrichs (2) : « il existe dans Δ une fonction surharmonique, positive, B, telle que $1/B . dB/dn$ prenne sur Δ'_2 les valeurs imposées à $1/\beta . d\beta/dn$ »; les lignes $\beta = 0$ décomposent alors Δ en domaines dont chacun doit atteindre Δ'_1 ou une singularité de β. On en déduit que le problème de Weinstein a une seule solution et que l'équation aux variations a une seule solution, d'indice (3) topologique $+1$. Or les solutions du problème du sillage ont pour indice total $+1$. Il ne peut donc en exister plusieurs, si chacune vérifie l'hypothèse de Friedrichs. En particulier : *Le problème symétrique du sillage possède une seule solution. Le problème du sillage possède une seule solution quand l'obstacle est convexe.*

3. *Nombre des solutions du problème de la proue.* — La solution du problème de Weinstein est évidente quand la variation de l'obstacle consiste à le prolonger en un point où le détachement est en proue : la variation de $f(z)$ est nulle. Le détachement s'oriente vers l'amont ou vers l'aval suivant que la ligne libre primitive s'écartait de l'obstacle vers l'amont ou l'aval. Cette remarque et le paragraphe 1 ont les conséquences suivantes : *Il existe des obstacles symétriques convexes pour lesquels le problème symétrique de la proue a plusieurs solutions. Le problème symétrique de la proue a une solution unique quand l'obstacle est une accolade. Le problème de la proue, posé pour un arc circulaire convexe, symétrique ou non, a une seule solution.*

---

(1) Voir A. Weinstein, *Ein hydrodynamischer Unitätssatz* (*Math. Zeitschr.*, **19**, 1924, p. 265).

(2) K. Friedrichs, *Uber ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande* (*Math. Annalen*, **109**, 1933, Anhang II, p. 77).

(3) Leray-Schauder, *Annales de l'École Normale supérieure*, **51**, 1934, p. 45.