où $M(X)$ est uniformément borné autour de chaque point de D, caractérise les fonctions analytiques dans D.

Ainsi, toutes les fonctions harmoniques d'ordre infini sont analytiques, mais l'inverse n'est évidemment pas vrai.

On trouve le théorème suivant :

Le prolongement analytique, même à travers l'espace complexe, d'une fonction harmonique d'ordre infini reste harmonique d'ordre infini.

Ce théorème peut être interprété de la façon suivante : *le prolongement analytique conserve l'équation* (1) qui peut être considérée comme équation aux dérivées partielles d'ordre infini. Il est intéressant que l'équation assez semblable à (1)

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\Delta^p u(X)|} = 0 \tag{2}$$

qui définit une classe particulière de fonctions harmoniques d'ordre infini et s'impose dans certains problèmes n'admette pas de théorème analogue. En effet, la fonction représentée en coordonnées polaires r, φ par la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n(n+2)} \cos(n 2^n \varphi)$$

est analytique et même harmonique d'ordre infini dans le cercle $r < 1$ et ne satisfait à l'équation (2) que dans le cercle $r < 1/2$.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Complément à l'étude des mouvements d'un liquide visqueux illimité.* Note de MM. **Jean Leray** et **Louis Robin**, présentée par M. Henri Villat.

Nous avons trouvé de nouveaux cas dans lesquels le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace ne peut présenter d'irrégularité [1].

Notations. — t désigne le temps, $t=0$ l'époque initiale, x un point de coordonnées (x_1, x_2, x_3), $u_i(x, t)$ est la vitesse du liquide, $u_i(x, 0)$ est donné.

1. Lemme sur la répartition de l'énergie cinétique. — Soit une fonction $\lambda(x)$

---

[1] Cette Note fait suite à l'article *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, par J. Leray (*Acta Math.*, 63, 1934, p. 193-248).

partout positive et de *gradient borné*. Soit $\Lambda(\lambda)$ l'ensemble des points x où $\lambda(x) > \lambda$. Soit un mouvement $u_i(x, t)$ régulier pour $0 < t \leqq t_1$. Si

$$(1) \qquad \liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda \iiint_{\Lambda(\lambda)} \sum_{i=1}^{3} u_i(x, 0)^2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 0,$$

alors il existe une suite λ_n, indépendante de t, convergeant vers $+\infty$, telle que

$$(2) \qquad \lambda_n \iiint_{\Lambda(\lambda_n)} \sum_{i} u_i(x, t)^2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} 0 \qquad (0 \leqq t \leqq t_1).$$

Ce lemme s'obtient en modifiant légèrement le paragraphe 27 du premier article cité.

2. Nouveaux cas de régularité. — Soit un mouvement dont l'état initial vérifie (1); supposons en outre l'une des conditions suivantes réalisée pour $0 < t \leqq t_1$:

a. En tout point x la vitesse est inférieure à $\lambda(x)$;

b. En tout point x le tourbillon est inférieur à $\lambda(x)$.

Alors ce mouvement est régulier pour $0 < t \leqq t_1$.

Démonstration. — Les formules classiques qui donnent la vitesse en fonction du tourbillon (²) montrent que *b*. est un cas particulier de *a*., qui reste donc seul à examiner.

Soit $V(t)$ la plus grande vitesse à l'instant t; soit ν le quotient de la viscosité par la densité; posons

$$\eta(\lambda) = \max_{0 \leqq t \leqq t_1} \iiint_{\Lambda(\lambda)} \sum_{i} u_i(x, t)^2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

Des inégalités dues à M. Oseen (³) permettent de majorer la vitesse, en un point appartenant à $\Lambda(\lambda)$, par une expression du type

$$(3) \qquad A \int_0^t \min \left\{ \frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} ; \frac{\eta(\lambda-1)}{[\nu(t-t')]^2} \right\} dt' + B,$$

où A est une constante numérique, B une constante dépendant de l'état ini-

(²) Voir les Leçons sur la *Théorie des tourbillons*, par H. Villat, Chap. II, Paris, 1930.

(³) Cf. Oseen, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927, et l'inégalité (3, 5) du premier article cité.

tial. Hors de $A(\lambda)$ la vitesse est inférieure à λ. Donc $V(t) < \lambda$ pour $0 \leq t \leq t_1$ si

$$\lambda > A \int_{-\infty}^{t} \min \left\{ \frac{\lambda^2}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{\eta(\lambda-1)}{[\nu(t-t')]^2} \right\} dt' + B,$$

c'est-à-dire si

$$\lambda > 3 A \nu^{-1} \lambda^{\frac{4}{3}} [\eta(\lambda-1)]^{\frac{4}{3}} + B. \tag{4}$$

D'après le paragraphe 1, lim inf. $\lambda\eta(\lambda) = 0$ pour $\lambda \to \infty$; l'inégalité (4) est donc satisfaite par une valeur de λ suffisamment grande.

L'existence de cette valeur, qui majore $V(t)$ pour $0 \leq t \leq t_1$, assure la régularité du mouvement [4] jusqu'à l'époque t_1.

3. Régularité des mouvements ayant une symétrie de révolution et des vitesses situées dans les plans méridiens [5]. — Soit un état initial de vitesses ayant le *caractère* suivant : il possède une symétrie de révolution et toutes les vitesses rencontrent l'axe de révolution. La vitesse est supposée de carré sommable, de divergence nulle. Nous savons qu'à cet état initial correspond au moins un mouvement ayant le même caractère.

Théorème. — Ce mouvement ne devient jamais irrégulier quand la condition (1) est vérifiée, λ y représentant la distance à l'axe de révolution.

Démonstration. — Un théorème de MM. J. Pérès et J. Avanessoff [6] affirme que la condition b du paragraphe 2 est réalisée.

Complément. — Supposons, en outre, qu'à l'époque initiale le quotient du tourbillon par la distance à l'axe est bornée. Faisons tendre vers 0 le coefficient de viscosité. Le mouvement étudié tend vers une limite. Ce mouvement limite, défini pour toutes les valeurs positives de t, obéit aux lois des liquides parfaits [7].

---

(4) Voir à la page 224 du premier article cité : premier caractère des irrégularités.

(5) Ces mouvements sont très analogues aux mouvements plans. Les propositions énoncées au cours de ce paragraphe s'appliquent aussi aux mouvements plans; J. Leray, *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 1892; J. Leray, Thèse, *Journal de Math.*, 9e série, **12**, 1933, p. 64-82; W. Wolibner, *Math. Zeitschrift*, **37**, 1933, p. 698-726.

(6) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 538.

(7) M. Wolibner a étudié directement ces mouvements des liquides parfaits.