un noyau symétrique qui satisfait à (1). Je profite de cette occasion pour signaler que la notion de noyau *défini* s'étend de la même manière à un noyau non symétrique.

On a alors la proposition suivante :

Les valeurs caractéristiques du noyau $K(x, y)$ *sont simples, les unes réelles et les autres de la forme* $\pm i\alpha$.

Il suffit de remarquer qu'on peut écrire

$$K(x, y) = \frac{1}{2}[K(x, y) + K(y, x)] + \frac{1}{2}[K(x, y) - K(y, x)] = M(x, y) + N(x, y),$$

où $M(x, y)$ est symétrique et satisfait à (1) en même temps que $K(x, y)$, tandis que $N(x, y)$ est symétrique gauche.

8° Lorsqu'on a seulement $I(K, u) \neq 0$, il faut ajouter une hypothèse supplémentaire pour conserver les propriétés 6° et 7°. Il suffit, par exemple, de supposer $N(x, y)$ fermé. Alors $H(x, y)$ est *défini* (prop. 3°) et le noyau $P(x, y)$ a des valeurs caractéristiques simples, de la forme $\pm i\alpha$ [O. Tzino [2], P. Sergesco [3]].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la résolution du problème de Dirichlet.* Note [1] de M. **Jean Leray**, présentée par M. Gaston Julia.

Soit l'équation aux dérivées partielles du type elliptique

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Nous allons étudier l'allure des dérivées secondes des solutions de cette équation, puis énoncer un théorème d'existence basé sur cette étude des dérivées secondes et sur notre étude des dérivées premières, qu'expose une Note [2] précédente. Nous emploierons les notations de cette Note antérieure, dont les paragraphes 1, 2, ... et les relations (1), (2), ... seront désignés ici par 1*, 2*, ..., (1*), (2*), ...

1. Étude des dérivées secondes. — Premier cas : dans l'espace (r, s, t) la surface $f = 0$ et la conique à l'infini $rt = s^2$ n'ont pas de tangente commune.

---

(2) *Bull. de l'École Pol. de Timisoara*, 1, fasc. 2, 1926, p. 40-41.
(3) *Bull. de la Soc. Roumaine de Math.*, 26, 1926, p. 16-17.

(1) Séance du 11 octobre 1937.
(2) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 268.

Extension d'un théorème de M. S. Bernstein [3]. — Il est possible, dans ce cas, de majorer $r^2+s^2+t^2$ en fonction de f, du contour γ et du maximum de p^2+q^2.

Démonstration. — On effectue d'abord cette majoration le long de γ. L'identité et l'inégalité

$$\oint p\,dq = \iint (rt - s^2)\,dx\,dy, \qquad s^2 - rt > \text{const.}(r^2+s^2+t^2) - \text{const.}$$

permettent de majorer $\iint (r^2+s^2+t^2)\,dx\,dy$. Une adaptation remarquable, due à M. Caccioppoli [4], d'un raisonnement de M. Lebesgue [5] fournit alors un module de continuité de p et de q. Ceci permet de définir, au voisinage de chaque point (x, y), une fonction $w(r, s, t, p, q)$ qui n'a pas de maximum relatif et qui est de la forme $\log(s^2 - rt) + \text{fonct.}(p, q)$ pour les grandes valeurs de $r^2+s^2+t^2$. On peut, d'autre part, majorer $\iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$ par un procédé analogue à celui qui a majoré $\iint (r^2+s^2+t^2)\,dx\,dy$. Ces propriétés de w donnent une borne supérieure de w, c'est-à-dire la majorante annoncée de $r^2+s^2+t^2$.

2. Étude des dérivées secondes. — Deuxième cas : dans l'espace (r, s, t) la surface $f=0$ a pour courbe à l'infini $rt=s^2$, quels que soient x, y, z, p, q. Autrement dit

$$(2) \qquad f \equiv rt - s^2 + g(r, s, t, p, q, x, y, z) + \ldots = 0 \qquad (f'_r > 0),$$

g étant homogène en r, s, t et de degré 1, les termes non écrits étant de degrés inférieurs. En outre nous supposerons (ce qui a toujours lieu quand $f=0$ est une équation de Monge-Ampère) que

$$(3) \qquad \text{borne inf.}\,(4f'_r f'_t - f'^2_s) > 0$$

pour $p^2+q^2+z^2$ borné supérieurement et $f=0$.

Extension d'un théorème de M. S. Bernstein [6]. — Dans ce cas la majoration des dérivées secondes n'est possible que si

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + 2\sigma\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q} + \sigma^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(1, \sigma, \sigma^2, p, q, x, y, z) \leq 0.$$

Elle est possible, en fonction de f, de γ et du maximum de p^2+q^2 si (7) a

---

[3] S. Bernstein, *Math. Annalen*, 69, 1910, p. 119-125.

[4] R. Caccioppoli, *Rendiconti d. r. Accad. dei Lincei*, 22, 1935, p. 307-308.

[5] H. Lebesgue, *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 24, 1905, p. 56.

[6] S. Bernstein, *Annales de l'École Normale supérieure*, 27, 1910, p. 246-252.

lieu et si γ vérifie l'inégalité

$$(5) \qquad \pm[x''_{y^2} - \lim p^{-1} g(1, -x'_y, x'^2_y, p, q, x, y, z)] > 0$$

pour $p \to \mp\infty$, $|px'_y + q|$ borné, $\pm\varepsilon > 0$ (le § 1* définit ε).

Cette condition (5) n'est jamais plus stricte que les conditions imposées au contour γ par les paragraphes 1* et 2* (cf. § 3, *Remarques*).

Démonstration. — Nous utilisons les procédés décrits au paragraphe 1*, la transformation de contact d'Ampère [qui joue un rôle analogue à celui de la transformation ponctuelle (2*)], la notion, due à S. Lie, de courbe intégrale de (1) [afin d'interpréter géométriquement (4) et (5) et d'établir leur invariance] et enfin le *lemme* de M. S. Bernstein, qu'utilise déjà le paragraphe 1 : « Une fonction $w(r, s, t, p, q, x, y, z)$ n'admet de maximum relatif sur aucune solution de (1) quand elle vérifie une certaine inégalité aux dérivées partielles, du second ordre ».

3. Extension [7] de théorèmes d'existence de MM. E. Picard et S. Bernstein. — Soient deux surfaces $\Sigma_1(x, y)$ et $\Sigma_2(x, y)$ sur lesquelles on a respectivement $f \leqq 0$ et $f \geqq 0$; supposons $\Sigma_1 > \Sigma_2$; soit un contour γ tracé entre Σ_1 et Σ_2. Supposons ou bien que la surface $f = 0$ et la conique à l'infini $rt = s^2$ n'ont aucune tangente commune, ou bien que f est du type (2) et vérifie (3) et (4). Supposons en outre que l'équation $f = 0$ et le contour γ satisfont ou bien aux conditions énoncées au paragraphe 1* ou bien à celles du paragraphe 2*. Alors γ *limite au moins une solution régulière de* (1).

Remarques concernant la condition (4*). — Supposons réalisées les conditions énoncées aux paragraphes 1 et 1*; au lieu d'imposer à Γ' de satisfaire à l'inégalité (4*), il suffit de l'imposer à γ.

Supposons réalisées les conditions énoncées aux paragraphes 2 et 1*; la fonction $F(0, T, \pm 0, Q\ x, y, z)$ n'est pas définie hors de l'intervalle

$$\pm[T - \lim p^{-1} g(1, -Q, Q^2, p, q, x, y, z)] < 0 \qquad (p \to \pm\infty, \quad |pQ + q| \text{ borné}),$$

F ne vérifiant qu'à l'intérieur de cet intervalle les conditions que lui impose le paragraphe 1; on peut alors substituer à la condition que Γ' satisfasse à (4*) la suivante : la partie de Γ' comprise entre γ et Σ_2 satisfait à l'inégalité (5) et γ satisfait à l'inégalité (4*), dans laquelle $\pm$ est remplacé par le signe de $-\varepsilon$.

---

(7) Ce théorème englobe les théorèmes d'existence que nous avons énoncés aux paragraphes 1* et 2*.