M. **Auguste Chevalier** fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage de †Louis Lavauden, *Les Forêts coloniales de la France* (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences coloniales), dont il a écrit une *Introduction* (vol. in-8, 276 p., 1942).

CORRESPONDANCE.

M. **Emmanuel de Martonne** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Géographie et Navigation par le décès de M. *E. Fichot*.

TOPOLOGIE. — *Les complexes d'un espace topologique.* Note de M. **Jean Leray**, présentée par M. Henri Villat.

Le Cours de Topologie que je professe à l'Université de captivité de l'Oflag XVII A expose une théorie des équations, des transformations et des homéomorphies qui s'applique directement à tout espace topologique (jusqu'à présent, on développait une telle théorie dans les espaces euclidiens et dans les multiplicités, puis, par passages à la limite, on la transposait aux seuls espaces abstraits linéaires). La présente Note résume les notions qui sont à la base de mon Cours; je crois que celles d'intersection de complexes et de couverture sont originales, mais je ne peux m'en assurer.

1. Un *complexe abstrait* C (ou c) est constitué par un nombre fini de symboles, les simplexes $S^{p,\alpha}$ (ou $s_{p,\alpha}$), dont le premier indice est nommé dimension, et par une loi de dérivation

$$\dot{S}^{p,\alpha}=\sum_{\beta} a_\beta S^{p+1,\beta}\qquad\left(\text{ou } \dot{s}_{p,\alpha}=\sum_{\beta} a_\beta s_{p-1,\beta}\right),$$

où a_β vaut ± 1 ou 0, telle que *toute dérivée seconde soit nulle*. On passe de la notation à indices supérieurs à la notation à indices inférieurs en changeant p en const. $-p$. La définition des chaînes, homologies, cycles, groupe d'homologie est la définition classique. Un complexe est dit *simple* quand tous ses groupes d'homologie sont nuls, sauf celui de dimension zéro, qui est cyclique. Un complexe est dit *supérieur* (et est toujours noté avec des indices supérieurs) lorsque S^p figure dans au moins $(p+1)$ $\dot{S}^{p-1,\alpha}$ et que chaque S^1 figure dans deux $\dot{S}^{0,\alpha}$, avec deux signes opposés; $C^0=\sum_{\alpha} S^{0,\alpha}$ est donc un cycle, qui est nommé *cycle unité*. Un complexe est dit *inférieur* (et est toujours noté avec des indices inférieurs) lorsque chaque $\dot{s}_p$ contient au moins $(p+1)$ s_{p-1} et que $\dot{s}_1=s_{0,\alpha}-s_{0,\beta}$; tout complexe inférieur est isomorphe à un complexe polyédral.

Le *produit* des deux complexes, par exemple des complexes supérieur C et inférieur c, est le complexe $C \times c$ suivant : ses simplexes sont les symboles $S^{p,\alpha} \times s_{q,\beta}$; leur dimension est $q-p$; la loi de dérivation est

$$(1) \qquad (S^{p,\alpha} \times s_{q,\beta})^{\bullet} = \dot{S}^{p,\alpha} \times s_{q,\beta} + (-1)^p S^{p,\alpha} \times \dot{s}_{q,\beta}.$$

Les complexes C et c sont dits *duals* l'un de l'autre, lorsqu'on peut établir entre leurs simplexes une correspondance biunivoque ($S^{p,\lambda}$ correspondant à $s_{p,\lambda}$) telle que

$$(2) \qquad \Big(\sum_{p,\lambda} S^{p,\lambda} \times s_{p,\lambda}\Big)^{\bullet} = 0;$$

la donnée de l'un de ces deux complexes définit l'autre.

Un *sous-complexe fermé* d'un complexe est un ensemble de simplexes de ce complexe, ensemble contenant tout les simplexes figurant dans les dérivées de chacun de ses éléments et auquel on applique la loi même de dérivation du complexe. En annulant dans un complexe et dans sa loi de dérivation tous les simplexes d'un sous-simplexe fermé, on obtient le *sous-complexe ouvert* complémentaire. Toute homologie qui vaut dans un sous-complexe fermé (dans un complexe) vaut dans le complexe (dans tout sous-complexe ouvert). Tout sous-complexe ouvert (fermé) d'un complexe supérieur (inférieur) est un complexe supérieur (inférieur).

2. Un *complexe concret* est constitué par un complexe abstrait, un espace topologique E et une loi qui associe à chaque simplexe $S^{p,\alpha}$ (ou $s_{p,\alpha}$) un ensemble de points de E, son support, $|S^{p,\alpha}|$ (ou $|s_{p,\alpha}|$); le support d'une chaîne est la réunion des supports de ses simplexes; *le support de la dérivée d'un simplexe doit appartenir au support de ce simplexe; tout simplexe à support vide est annulé.*

L'intersection d'un complexe concret C *par un ensemble* E s'obtient en remplaçant chaque support par son intersection avec E; c'est un sous-complexe ouvert de C. Un complexe est dit simple sur un ensemble quand son intersection par cet ensemble est un complexe simple.

Envisageons deux complexes concrets d'un même espace E, par exemple C et c; leur *intersection* $C.c$ est le sous-complexe ouvert de $C \times c$ que constituent les simplexes $S^{p,\alpha}.s_{q,\beta}$, dont les supports sont $|S^{p,\alpha}|.|s_{q,\beta}|$.

Une *couverture* d'un espace topologique E est un complexe supérieur C possédant les propriétés suivantes : C est simple en chaque point de E; chaque simplexe de C a pour support un ensemble fermé de points de E. Le transformé d'une couverture par l'inverse d'une transformation continue, l'intersection d'une couverture par un ensemble, l'intersection de deux couvertures est une couverture. A tout recouvrement fermé fini est associé très simplement (grâce à la multiplication extérieure de Grassmann) une couverture. (L'intersection de deux couvertures correspondant à deux recouvrements a une structure plus simple que la couverture définie par l'intersection de ces deux recouvrements :

la notion de couverture est souvent plus maniable que celle de recouvrement.)

Dans l'intersection d'une couverture C de E par un complexe de E, *on identifie chaque élément* de ce complexe *avec son intersection par le cycle unité de* C.

Envisageons l'intersection d'un complexe continu c par une couverture C, lorsque $|c| \subset |C|$. On peut trouver des subdivisions de c telles que C soit simple sur chacun des simplexes de ces subdivisions; tout cycle de $C.c$ est alors homologue dans $C.c$ aux cycles d'une classe d'homologie de c; cette classe ne dépend pas du choix de la subdivision. Donc *tout complexe continu c a les mêmes groupes d'homologie que son intersection $C.c$ par une ouverture, si $|c| \subset |C|$.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation des fonctions hyperabéliennes d'Émile Picard.* Note (1) de M. **Henri Roure**.

Je me propose de montrer l'existence de fonctions à plusieurs séries de variables qui se reproduisent quand chaque série de variables est soumise à toutes les substitutions d'un groupe linéaire discontinu portant sur ces variables et qui laisse inaltérée une forme quadratique à indéterminées conjuguées. J'ai utilisé les travaux d'Émile Picard sur la réduction des formes, sur les fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes (*Acta Mathematica*, 1, pp. 297-320; 5, pp. 121-182; *Journal de Liouville*, 4e série, 5, pp. 87-128), et voici ce que j'ai obtenu : soient, par exemple, deux séries de variables complexes (x, y) et (z, t) et les substitutions

$$\left[x, y, X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''}\right],$$
$$\left[z, t, Z = \frac{Dz + Et + F}{D''z + E''t + F''}, T + \frac{D'z + E't + F'}{D''z + E''t + F''}\right],$$

où les coefficients sont des nombres entiers réels, et les formes à indéterminées conjuguées

$$G = aUU_0 + bVV_0 + cWW_0, \qquad H = a'U'U'_0 + b'V'V'_0 + c'W'W'_0,$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels. G correspond aux variables x, y et H aux variables z, t. Les substitutions forment respectivement deux groupes linéaires, et les relations obtenues en exprimant que G et H restent inaltérées montrent que, pour qu'il y ait une infinité de substitutions donnant ce résultat, il faut que les coefficients (a, b, c) et (a', b', c') soient de signes différents. Nous supposerons que a, b, a', b' sont positifs et que c et c' sont négatifs et égaux respectivement à $-h$ et à $-h'$. Dans ce cas, en utilisant les travaux

(1) Séance du 9 mars 1942.