Le Dr Martin faisait partie depuis 1919 de l'Académie de Médecine, qu'il présida en 1940. Il avait été nommé en 1935 président du Conseil Supérieur d'Hygiène publique de la France. Chargé en 1934 de la direction de l'Institut Pasteur, il conserva cette direction jusqu'en 1941. Il avait été élu Membre de notre Académie comme Académicien libre le 3 mai 1937.

Par ses qualités de savant, d'administrateur, d'organisateur, le Dr Martin a rendu à la cause de la santé publique les plus éminents services. C'est un grand serviteur de son pays que nous perdons avec Louis Martin. En votre nom, j'adresse à Madame Louis Martin et à sa famille l'expression de notre sympathie respectueuse.

La séance sera levée en signe de deuil, après le vote inscrit à l'ordre du jour.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à MM. **Gavin Rylands de Beer**, Professeur d'Embryologie à l'Université de Londres, Président de la *Linnean Society*, **B. P. Georges Hochreutiner**, Président de l'Institut National genevois, **J. Ramsbottom**, Conservateur pour la Botanique au *British Museum*, **Winckworth**, Vice-Président de la *Linnean Society*, **Francisco d'Ascenscio Mendonça**, Professeur de Botanique à l'Université de Coimbra, qui assistent à la séance.

TOPOLOGIE. — *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation.* Note (1) de M. **Jean Leray**.

1. Étant donnés un anneau $\mathfrak{A}$ et une représentation fermée π d'un espace normal E dans un espace normal E*, nous avons défini récemment (2) l'anneau d'homologie de π relatif à $\mathfrak{A}$. *Cet anneau a la structure suivante :*

Le $(p, q)^{\text{ième}}$ module d'homologie $\mathfrak{P}_1^{p,q}$ de π possède les *sous-modules*

$$0 = \mathfrak{Q}_{-1}^{p,q} = \mathfrak{Q}_0^{p,q} \subset \mathfrak{Q}_1^{p,q} \subset \mathfrak{Q}_2^{p,q} \subset \ldots \subset \mathfrak{Q}_{q-2}^{p,q} \subset \mathfrak{Q}_{q-1}^{p,q} \subset \mathfrak{P}_{p+1}^{p,q} \subset \mathfrak{P}_p^{p,q} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_2^{p,q} \subset \mathfrak{P}_1^{p,q};$$

le $p^{\text{ième}}$ module d'homologie $\mathcal{E}^{p,0}$ de E relatif à $\mathfrak{A}$ possède les *sous-modules*

$$0 = \mathcal{E}^{-1,p+1} \subset \mathcal{E}^{0,p} \subset \mathcal{E}^{1,p-1} \subset \ldots \subset \mathcal{E}^{p-1,1} \subset \mathcal{E}^{p,0};$$

il existe des *homomorphismes* Δ_r de $\mathfrak{P}_r^{p,q}$ sur $\mathfrak{Q}_r^{p-r,q+r+1}/\mathfrak{Q}_{r-1}^{p-r,q+r+1}$ ayant pour noyau $\mathfrak{P}_{r+1}^{p,q}$ $(1 \leqq r \leqq p)$;

il existe des *homomorphismes* Γ de $\mathfrak{P}_{p+1}^{p,q}$ sur $\mathcal{E}^{p,q}/\mathcal{E}^{p-1,q+1}$ ayant pour noyau $\mathfrak{Q}_{q-1}^{p,q}$.

2. *Les définitions* de ces sous-modules et de ces homomorphismes sont les suivantes :

1° Soient $Z^{\star p,q}$ et $Z^{\star p-r,q+r+1}$ des classes d'homologie de E* relatives respectivement à $\pi(\mathcal{B}^p)$ et à $\pi(\mathcal{B}^{p-r})$; la condition

$$Z^{\star p,q} \in \mathfrak{P}_r^{p,q}, \qquad Z^{\star p-r,q+r+1} \in \mathfrak{Q}_r^{p-r,q+r+1}, \qquad \Delta_r(Z^{\star p,q}) \sim Z^{\star p-r,q+r+1} \bmod \mathfrak{Q}_{r-1}^{p-r,q+r+1}$$

(1) Séance du 27 mai 1946.

(2) *Comptes rendus*, 222, 1945, p. 1366.

équivaut à celle-ci : il existe une couverture $C^\star$ de E, dont nous nommerons les éléments $X^{\star r;\gamma}$, un cycle $\sum_\alpha z^{p;\alpha} X^{\star q;\alpha}$ appartenant à la classe $Z^{\star p,q}$, un cycle $\sum_\beta z^{p-r;\beta} X^{\star q+r+1;\beta}$ appartenant à la classe $Z^{\star p-r,q+r+1}$ et une forme $L^{p,q}$ de E, à coefficients pris dans $\mathcal{A}$, tels que

$$L^{p,q} = \sum_\alpha L'^{p;\alpha}.\overset{-1}{\pi}(X^{\star q;\alpha}) + \sum_{s>0,\lambda} L'^{p-s;\lambda}.\overset{-1}{\pi}(X^{\star q+s;\lambda}),$$

$$\dot{L}^{p,q} = \sum_\beta L'^{p-r;\beta}.\overset{-1}{\pi}(X^{\star q+r+1;\beta}) + \sum_{t>0,\mu} L'^{p-r-t;\mu}.\overset{-1}{\pi}(X^{\star q+r+1+t;\mu}),$$

$$L'^{p;\alpha}.\overset{-1}{\pi}(|X^{\star q;\alpha}|) \sim z^{p;\alpha} \quad \text{et} \quad L'^{p-r;\beta}.\overset{-1}{\pi}(|X^{\star q+r+1;\beta}|) \sim z^{p-r;\beta};$$

dans ces formules $z^{p;\alpha}$ représente une classe d'homologie à p dimensions de $\overset{-1}{\pi}(|X^{\star q;\alpha}|)$ relative à $\mathcal{A}$ et les L' représentent des formes, à coefficients pris dans $\mathcal{A}$, d'une couverture C' de E.

2° Soit $Z^{\star p,q}$ une classe d'homologie de $E^\star$ relatvie à $\pi(\mathcal{B}^p)$; soit Z^{p+q} une classe d'homologie de E relative à $\mathcal{A}$; la condition $Z^{\star p,q} \in \mathcal{X}^{p,q}_{p+1}$, $Z^{p+q} \in \mathcal{E}^{p,q}$, $\Gamma(Z^{\star p,q}) \sim Z^{p+q} \bmod \mathcal{E}^{p-1,q+1}$ équivaut à la suivante : il existe un cycle $\sum_\alpha z^{p;\alpha} X^{\star q;\alpha}$ de la classe $Z^{\star p,q}$ et un cycle $L^{p,q}$ de la classe Z^{p+q} tels que

$$L^{p,q} = \sum_\alpha L'^{p;\alpha}.\overset{-1}{\pi}(X^{\star q;\alpha}) + \sum_{s>0,\lambda} L'^{p-s;\lambda}.\overset{-1}{\pi}(X^{\star q+s;\lambda}),$$

$$L'^{p;\alpha}.\overset{-1}{\pi}(|X^{\star q;\alpha}|) \sim z^{p;\alpha}.$$

3. *En particulier*, si Z^p et $Z^{\star q}$ sont des classes d'homologie de E et de $E^\star$ relatives à $\mathcal{A}$, $Z^p Z^{\star q}$ est une classe d'homologie de π

$$Z^p Z^{\star q} \in \mathcal{X}^{p,q}_{p+1}; \qquad \Gamma(Z^p Z^{\star q}) \sim Z^p.\overset{-1}{\pi}(Z^{\star q}) \qquad \bmod \mathcal{E}^{p-1,q+1}.$$

L'homomorphisme $\overset{-1}{\Gamma}$ de $\mathcal{E}^{p,0}$ sur $\mathcal{X}^{p,0}_{p+1}$ est donc $\overset{-1}{\Gamma}(Z^p) \sim Z^p E^{\star 0}$; il en résulte que $\mathcal{X}^{p,0}_{p+1}$ est l'ensemble des classes d'homologie de π du type $Z^p E^{\star 0}$ et que $\mathcal{E}^{p-1,1}$ est l'ensemble des classes d'homologie Z^p de E ayant la propriété que voici : on peut recouvrir $E^\star$ avec un nombre fini d'ensembles fermés $F^\star_\lambda$ tels que $Z^p.\overset{-1}{\pi}(F^\star_\lambda) \sim 0$ quel que soit λ; quand $E^\star$ est bicompact, on peut définir $\mathcal{E}^{p-1,1}$ comme l'ensemble des classes d'homologie Z^p de E telles que $Z^p.\overset{-1}{\pi}(x^\star) \sim 0$ quel que soit le point $x^\star$ de $E^\star$.

4. Les propriétés de l'*intersection* sont les suivantes : désignons par $\mathcal{X}^{p,q}_r.\mathcal{X}^{s,t}_r$ le plus petit module contenant les intersections des divers éléments de $\mathcal{X}^{p,q}_r$ par les divers éléments de $\mathcal{X}^{s,t}_r$; convenons de poser $\mathcal{X}^{p,q}_{p+1} = \mathcal{X}^{p,q}_{p+2} = \ldots$ et $\Delta_r(Z^{p,q}) \sim 0$

quand $Z^{p,q} \in \mathcal{X}^{p,q}_{p+1}$ et $r \geqq p+1$; on a

$$\mathcal{X}^{p,q}_r . \mathcal{X}^{s,t}_r \subset \mathcal{X}^{p+s,q+t}_r; \qquad \mathcal{X}^{p,q}_r . \mathcal{Q}^{s,t}_{r-1} \subset \mathcal{Q}^{p+s,q+t}_{r-1}; \qquad \mathcal{E}^{p,q} . \mathcal{E}^{r,s} \subset \mathcal{E}^{p+r,q+s};$$

$$\Delta_r(Z^{p,q}.Z^{s,t}) \sim \Delta_r(Z^{p,q}).Z^{s,t} + (-1)^{p+q} Z^{p,q}.\Delta_r(Z^{s,t}) \qquad \operatorname{mod} \mathcal{Q}^{p+s-r,\,q+t+r+1}_{r-1},$$

quand $Z^{p,q} \in \mathcal{X}^{p,q}_r$ et $Z^{s,t} \in \mathcal{X}^{s,t}_r$;

$$\Gamma(Z^{p,q}.Z^{r,s}) \sim \Gamma(Z^{p,q}).\Gamma(Z^{r,s}) \qquad \operatorname{mod} \mathcal{E}^{p+r-1,\,q+s+1},$$

quand $Z^{p,q} \in \mathcal{X}^{p,q}_{p+1}$ et $Z^{r,s} \in \mathcal{X}^{r,s}_{r+1}$.

Les homomorphismes Δ_r et Γ du *produit* de deux représentations se rattachent aux homomorphismes Δ_r et Γ de ces deux représentations par des formules analogues aux précédentes. Les homomorphismes de l'anneau d'homologie d'une représentation π que définissent l'intersection de π par un ensemble ou la transformation de π par l'inverse d'une représentation [*loc. cit.* (1), 4], respectent les homomorphismes Δ_r et Γ.

5. Les propriétés que nous avons énoncées de l'anneau d'homologie d'une représentation peuvent servir à l'étude de l'anneau d'homologie d'un espace et à l'étude de la transformation de cet anneau par l'inverse d'une représentation. Par exemple supposons que $E^\star$ soit bicompact et que, quel que soit le point $x^\star$ de $E^\star$, $\overset{-1}{\pi}(x^\star)$ soit simple (c'est-à-dire ait pour seules classes d'homologie les produits par les éléments de $\mathcal{A}$ de la classe unité); alors $\overset{-1}{\pi}$ est un isomorphisme de l'anneau d'homologie de $E^\star$ relatif à $\mathcal{A}$ sur l'anneau d'homologie de E. Supposons que $E^\star$ soit bicompact et que $\overset{-1}{\pi}(x^\star)$ soit connexe quel que soit le point $x^\star$ de $E^\star$; alors $\overset{-1}{\pi}$ est un isomorphisme du premier module d'homologie de $E^\star$ dans (c'est-à-dire sur un sous-module de) celui de E. Supposons que π soit la projection d'un espace fibré E sur son espace de base $E^\star$, que cet espace de base $E^\star$ soit simplement connexe et que E, $E^\star$ et la fibre F soient des multiplicités; alors le $(p, q)^{\text{ième}}$ module d'homologie de π est le $q^{\text{ième}}$ module d'homologie de $E^\star$ relatif au $p^{\text{ième}}$ module d'homologie de F et, $\mathcal{A}$ étant supposé un corps, l'application aux homomorphismes Δ_r et Γ du théorème sur le rang d'un quotient de modules fournit le résultat suivant : soient $\mathcal{E}(t)$, $\mathcal{E}^\star(t)$ et $\mathcal{F}(t)$ les polynomes de Poincaré de E, $E^\star$ et F; il existe un polynome $\mathcal{B}(t)$ à coefficients entiers non négatifs tel que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{F}(t)\mathcal{E}^\star(t) - (1+t)\mathcal{B}(t)$. Soient un groupe bicompact, simplement connexe, E, et un sous-groupe fermé, connexe, à un paramètre, F, de E; soit $E^\star$ l'espace homogène défini par E et F; soit π la projection de chaque classe de E suivant F sur le point correspondant de $E^\star$; supposons que $\mathcal{A}$ soit le corps des nombres rationnels; alors l'anneau d'homologie de $E^\star$ relatif à $\mathcal{A}$ est engendré par des classes d'homologie $Z^{\star 2}$, $Z^{\star 2p+1;\alpha}$ et la seule relation $(Z^{\star 2})^{n+1} \sim 0$; on a $\overset{-1}{\pi}(Z^{\star 2}) \sim 0$; l'anneau d'homologie de E est engendré par une classe hypermaximale Z^{2n+1} et par les classes hypermaximales $\overset{-1}{\pi}(Z^{\star 2p+1;\alpha})$. Les propriétés de l'anneau d'homologie d'une représentation

permettent également de retrouver les théorèmes de M. Gysin sur les espaces fibrés dont les fibres sont des sphères et le théorème de M. Samelson sur les groupes bicompacts transformant transitivement une sphère [3].

ÉLECTIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, Sir **Harold Spencer Jones** est élu Correspondant pour la Section d'Astronomie en remplacement de M. *Louis Fabry*, décédé.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Faune de l'Empire français. V. *Coléoptères cérambycides de l'Afrique du Nord*, par André Villiers.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur une généralisation d'un problème élémentaire classique, importante dans l'inspection des produits industriels.* Note [1] de M. **George Pólya**, présentée par M. Jacques Hadamard.

1. Dans ce qui suit le mot *point* désignera un point du plan dont les coordonnées sont des entiers non négatifs. Les points $(x+1, y)$ et $(x, y+1)$ *suivent immédiatement* le point (x, y), le premier dans la direction des x, le second dans la direction des y. Les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_l, y_l) forment un *chemin* si $(x_{\lambda+1}, y_{\lambda+1})$ suit immédiatement (x_λ, y_λ), pour $\lambda=0, 1, \ldots, l-1$. Ce chemin est issu de (x_0, y_0), aboutit à (x_l, y_l) et a la longueur l. Donnons trois nombres positifs h_1, h_2 et s où $s<1$. Les points (x, y) satisfaisant aux inégalités

$$(1) \qquad -h_1+s(x+y)<x<h_2+s(x+y)$$

s'appellent points de la bande B. Nous ne considérons que le cas où à chaque point (x, y) de B différent de $(0, 0)$ aboutit un chemin issu de $(0, 0)$ formé exclusivement de points de B. Le nombre de ces chemins aboutissant à (x, y) est appelé $K(x, y)$. Nous allons calculer $K(x, y)$ *en supposant que s est un nombre rationnel.* Dans ce cas-là $s/(1-s)=a/b$, où a et b sont des entiers positifs sans diviseur commun, et la bande B se décompose en une infinité de tronçons T_0, T_1, T_2, $\ldots$; si $n\geq 1$ et (x, y) parcourt les points de T_n,

---

[3] Gysin, *Commentarii Helv.*, **14**, 1941, p. 61; Samelson, *Ann. of Math.*, **42**, 1941, p. 1000.

[1] Séance du 12 juin 1946.