TOPOLOGIE. — *Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base.* Note (¹) de M. **Jean Leray**.

1. *Le polynome de Poincaré $\mathfrak{P}(t, t^*)$ d'une représentation* π. — Soit π une représentation d'un espace bicompact E dans un espace bicompact E*; soit un corps $\mathfrak{A}$; soient $\mathfrak{P}_1^{p,q}$ les modules d'homologie (²) de π relatifs à $\mathfrak{A}$; supposons qu'ils aient des bases finies; désignons par $\rho(\mathfrak{M})$ le rang d'un $\mathfrak{A}$-module $\mathfrak{M}$; posons

$$\mathfrak{P}(t, t^*) = \sum_{p,q} t^p t^{*q} \rho(\mathfrak{P}_1^{p,q}); \qquad \mathcal{E}(t, t^*) = \sum_{p,q} t^p t^{*q} \rho(\mathcal{E}^{p,q}/\mathcal{E}^{p-1,q+1});$$

$$\mathfrak{D}_r(t, t^*) = \sum_{p \geqq r, q} t^{p-r} t^{*q} \rho(\mathfrak{P}_r^{p,q}/\mathfrak{P}_{r-1}^{p,q});$$

l'application aux homomorphismes Δ_r et Γ du théorème sur le rang d'un quotient de modules donne

$$\mathcal{E}(t, t^*) = \mathfrak{P}(t, t^*) - \sum_{r \geqq 1} (t^r + t^{*r-1}) \mathfrak{D}_r(t, t^*); \tag{1}$$

$$\mathcal{E}(t, t) = \sum_p t^p \rho(\mathcal{E}^{p,0}) \tag{2}$$

est le polynome de Poincaré de E relatif à $\mathfrak{A}$;

$$\mathcal{E}(t, 0) = \sum_p t^p \rho(\mathcal{E}^{p,0}/\mathcal{E}^{p-1,1}); \tag{3}$$

nous désignons par $\mathcal{E}^{p,0}$ le $p^{\text{ième}}$ module d'homologie de E relatif à $\mathfrak{A}$ et par $\mathcal{E}^{p-1,1}$ le sous-module de $\mathcal{E}^{p,0}$ que constituent les classes d'homologie Z^p de E, telles que $Z^p . \overset{-1}{\pi}(x^*) \sim 0$, quel que soit le point x^* de E*; si $\overset{-1}{\pi}(x^*)$ est connexe quel que soit x^*, on a, $\mathcal{E}^{*p}$ représentant le $p^{\text{ième}}$ module d'homologie de E* relatif à $\mathfrak{A}$,

$$\mathcal{E}(0, t^*) = \sum_p t^p \rho\left(\overset{-1}{\pi}(\mathcal{E}^{*p})\right), \tag{4}$$

2. *Extension du théorème de dualité de H. Poincaré à la projection π d'un espace fibré* E *sur sa base* E*. — Supposons *que* E *et* E* *soient des multiplicités fermées, connexes, orientables* à $l+m$ et m dimensions, *que la fibre* F *soit une multiplicité fermée orientable à l dimensions* et *que $\mathfrak{A}$ soit le corps des rationnels ou le corps des entiers calculés mod. n, n étant premier.* Les modules d'homo-

(¹) Séance du 26 août 1946.

(²) Deux Notes antérieures, dont nous conservons les notations, définissent l'anneau d'homologie d'une représentation et précisent sa structure (*Comptes rendus*, 222, 1946, pp. 1366 et 1419).

logie $\mathfrak{L}_1^{p,q}$ de π relatifs à $\mathfrak{A}$ ont des bases finies et une généralisation du théorème de dualité de Poincaré prouve que $\mathfrak{L}_1^{p,q}$ et $\mathfrak{L}_1^{l-p,m-q}$ sont duals [3] relativement à leur intersection qui est définie dans $\mathfrak{L}_1^{l,m}$, module isomorphe à $\mathfrak{A}$; les propriétés des homomorphismes Δ_r et Γ permettent de déduire de cette dualité les conclusions suivantes : *Les modules d'homologie $\mathfrak{L}_1^{p,q}$ et $\mathfrak{L}_1^{l-p,m-q}$ de π relatifs à $\mathfrak{A}$ sont duals, leurs sous-modules $\mathfrak{L}_r^{p,q}$ et $\mathfrak{D}_r^{l-p,m-q}$ étant annulateurs l'un de l'autre; les modules d'homologie $\mathcal{E}^{p,0}$ et $\mathcal{E}^{m+n-p,0}$ de* E *relatifs à $\mathfrak{A}$ sont duals (H. Poincaré), leurs sous-modules $\mathcal{E}^{p-q,q}$ et $\mathcal{E}^{m-p+q-1,n-q+1}$ étant annulateurs l'un de l'autre*. D'où

$$\mathfrak{L}(t,t^*)=t^l t^{*m}\mathfrak{L}\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t^*}\right);\quad \mathcal{E}(t,t^*)=t^l t^{*m}\mathcal{E}\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t^*}\right);\quad \mathcal{D}_r(t,t^*)=t^{l-r}t^{*m-r-1}\mathcal{D}_r\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t^*}\right).$$

3. *Cas où l'anneau d'homologie de π est le produit direct des anneaux d'homologie de* F *et de* F*. — Ce cas se présente quand, F *étant connexe* et $\mathfrak{A}$ *étant un corps,* on peut établir entre l'anneau d'homologie d'une fibre fixe et l'anneau d'homologie de la fibre la plus générale F un isomorphisme qui varie continûment avec F, car le $(p, q)^{\text{ième}}$ module d'homologie de π est alors le $q^{\text{ième}}$ module d'homologie de E* relatif au $p^{\text{ième}}$ module d'homologie de F; il en est en particulier ainsi quand E* est simplement connexe ou quand F est une sphère qu'on peut orienter continûment. Soient $\mathcal{E}(t)$, $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{E}^*(t)$ les polynomes de Poincaré de E, F et E*; soit $\mathcal{E}_\pi(t)$ [et $\mathcal{F}_E(t)$] le polynome dont le coefficient de t^p est le rang du module que constituent les transformées par $\overset{-1}{\pi}$ des classes d'homologie de E* [les intersections par F des classes d'homologie de E] : avec les notations du n° 1

$$\mathfrak{L}(t,t^*)=\mathcal{F}(t)\,\mathcal{E}^*(t^*);\qquad \mathcal{E}(t,t)=\mathcal{E}(t);\qquad \mathcal{E}(0,t)=\mathcal{E}_\pi(t);\qquad \mathcal{E}(t,0)=\mathcal{F}_E(t);$$

posons $\mathcal{D}(t)=\sum_{r\geqq 1} t^r\mathcal{D}_r(t,t)$; *le symbole* $0\leqq\mathfrak{A}(t)$ exprimera que le développement de $\mathfrak{A}(t)$ suivant les puissances croissantes de t a des coefficients positifs ou nuls; les formules du n° 1 et les relations

$$\mathfrak{L}_r^{p,0}.\mathfrak{L}_1^{0,q}\subset\mathfrak{L}_r^{p,q}\qquad\text{et}\qquad \mathfrak{L}_r^{p,0}.\mathfrak{D}_{r-1}^{0,q}\subset\mathfrak{D}_{r-1}^{p,q}$$

donnent

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{F}(t)\,\mathcal{E}^*(t)-(1+t)\,\mathcal{D}(t),\qquad \text{où } 0\leqq\mathcal{D}(t);\tag{5}$$

$$1\leqq\mathcal{E}_\pi(t)\leqq\mathcal{E}^*(t);\qquad \mathcal{E}_\pi(t)\leqq\mathcal{E}(t);\qquad 1\leqq\mathcal{F}_E(t)\leqq\mathcal{F}(t);\qquad \mathcal{F}_E(t)\leqq\mathcal{E}(t);\tag{6}$$

$$\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}_E(t)\leqq\mathcal{D}(t)\leqq[\mathcal{F}(t)-\mathcal{F}_E(t)]\,\mathcal{E}^*(t);\tag{7}$$

$$\mathcal{F}_E(t)\,[\mathcal{E}^*(t)-\mathcal{E}_\pi(t)]\leqq\mathcal{D}(t).\tag{8}$$

D'où les inégalités suivantes entre $\mathcal{E}(t)$, $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{E}^*(t)$

$$\frac{1-t[\mathcal{F}(t)-1]}{1+t}\,\mathcal{E}^*(t)\leqq\frac{\mathcal{E}(t)}{1+t}\leqq\frac{\mathcal{F}(t)\,\mathcal{E}^*(t)}{1+t}\tag{9}$$

---

[3] C'est-à-dire : chacun de ces modules est le groupe des caractères de l'autre; ils sont isomorphes.

et plus particulièrement

$$\{1 - t[\mathcal{F}(t) - 1]\}\mathcal{E}^*(t) \leqq \mathcal{E}(t) \leqq \mathcal{F}(t)\mathcal{E}^*(t); \tag{10}$$

$$\mathcal{E}^*(t) \leqq \frac{\mathcal{E}(t)}{1 - t[\mathcal{F}(t) - 1]}. \tag{11}$$

M. G. Hirsch m'a signalé qu'il a obtenu (5) par un autre procédé. Dans le cas particulier où F est une sphère, (5) et un corollaire de (11) furent établis par M. W. Gysin; le raisonnement de M. Gysin utilise un homomorphisme qui généralise l'invariant que M. H. Hopf a attaché à une représentation d'une sphère à $4k - 1$ dimensions dans une multiplicité à $2k$ dimensions ([4]); l'invariant de M. Hopf et l'homomorphisme de M. Gysin peuvent être rattachés à notre homomorphisme Δ_t.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Facultad de Ingenieria. Montevideo. *Publicaciones del Instituto de matematica y estadistica*, vol. 1, n^os 1, 2, 3.

2° *Les prix Nobel en* 1940-1944.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur quelques inégalités pour les dérivées des fonctions d'une variable réelle et pour les différences des suites.* Note ([1]) de M. **Nikola Obrechkoff**, présentée par M. Paul Montel.

Dans une Note récente, nous avons démontré quelques inégalités pour les fonctions d'une variable réelle définies pour $x > a$. De nos théorèmes, on peut tirer encore le résultat suivant :

I. *Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions qui, pour $x > a$, admettent des dérivées $f^{(n)}(x)$ et $\varphi^{(n)}(x)$ intégrables dans chaque intervalle (a, X), $X > a$, $\varphi^{(n)}(x)$ étant toujours non négative pour $x > a$. Supposons que, pour $x > a$, on ait*

$$f^{(n)}(x) \leqq \varphi^{(n)}(x) \tag{1}$$

et que, pour une suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$, de nombres croissant indéfiniment et pour un nombre entier m $(0 \leqq m < n)$, les limites

$$\lim_{p \to \infty} \frac{f(y_p)}{y_p^m} = A, \qquad \lim_{p \to \infty} \frac{\varphi(y_p)}{y_p^m} = A_1$$

([4]) H. Hopf, *Fund. math.*, **25**, 1935, p. 427; W. Gysin, *Comm. math. helv.*, **14**, 1941, p. 112, th. 35 et 34.

([1]) Séance du 26 août 1946.