TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Application continue commutant avec les éléments d'un groupe de Lie compact.* Note (*) de M. **Jean Leray**.

Les algèbres, cohomologies et produits tensoriels sont relatifs à un même corps commutatif, de caractéristique nulle; X et Y sont deux espaces *localement compacts*; ξ *est une application continue de* X *dans* Y.

1. *Les invariants topologiques* de ξ sont ([1]) *une filtration* f_{Y} de l'algèbre d'homologie $\mathcal{H}_{\mathrm{X}}$ de X et *une algèbre différentielle* $\mathcal{H}_r$ dépendant de l'entier $r \geqq 2$. $\mathcal{H}_2$ est l'algèbre de cohomologie de Y relative « au transformé par ξ du faisceau de cohomologie de X », ce qui signifie grosso modo : relative à un anneau variable qui au point y de Y est l'algèbre de cohomologie de $\overset{-1}{\xi}(y)$; en particulier $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\mathrm{Y}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{F}}$ quand ξ est la projection d'un espace fibré X, de fibre F, sur sa base Y, supposée simplement connexe et quand ξ est l'application canonique d'un groupe X sur l'espace homogène $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{F}$, quotient de X par un sous-groupe F fermé et connexe; $\mathcal{H}_r$ possède deux degrés : $0 \leqq g_{\mathrm{Y}} \leqq g_{\mathrm{X}}$; les degrés g_{X} ou g_{Y} de $\mathcal{H}_2$ s'obtiennent en affectant de leur degré ou du degré nul les éléments des algèbres de cohomologie de $\overset{-1}{\xi}(y)$ et F; la différentielle δ_r de $\mathcal{H}_r$ augmente g_{Y} de r et g_{X} de 1; $\mathcal{H}_{r+1}$ est l'algèbre d'homologie de $\mathcal{H}_r$; les éléments de $\mathcal{H}_r$ annulant δ_r ont donc une image canonique de même degré dans $\mathcal{H}_{r+1}$; si $r > \dim \mathrm{Y}$ ou $> 1 + \max \dim \overset{-1}{\xi}(y)$, $\delta_r = 0$; $\mathcal{H}_r$ est alors indépendant de r; on le note $\mathcal{H}_\infty$; $\mathcal{H}_\infty$ est l'algèbre bigraduée associée à l'algèbre graduée-filtrée $\mathcal{H}_{\mathrm{X}}$; la filtration f_{Y} et le degré g_{X} d'un élément homogène de $\mathcal{H}_{\mathrm{X}}$ vérifient $0 \leqq f_{\mathrm{Y}} \leqq g_{\mathrm{X}}$. Le degré $g_{\mathrm{F}} = g_{\mathrm{X}} - g_{\mathrm{Y}}$ et la filtration $f_{\mathrm{F}} = f_{\mathrm{Y}} - g_{\mathrm{X}}$ associée à $-g_{\mathrm{F}}$ interviendront.

Il existe *un homomorphisme canonique* Φ de $\mathcal{H}_{\mathrm{X}}$ sur le sous-anneau $\mathcal{H}_2$ que constituent les éléments de degré $g_{\mathrm{Y}} = 0$ qui ont une image dans $\mathcal{H}_\infty$; les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\Phi h_{\mathrm{X}} = 0; \qquad \overset{-1}{\xi}(y) h_{\mathrm{X}} = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathrm{Y}; \qquad f_{\mathrm{Y}}(h_{\mathrm{X}}) > 0 \qquad (h_{\mathrm{X}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{X}}).$$

Quand $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\mathrm{Y}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{F}}$, $\Phi h_{\mathrm{X}} = 1 \otimes \mathrm{F} h_{\mathrm{X}}$ si Y est compact, $= 0$ si non.

Si ξ est propre, c'est-à-dire si $\overset{-1}{\xi}$ transforme toute partie compacte de Y en une partie compacte de X, il existe un homomorphisme canonique Ψ de $\mathcal{H}_{\mathrm{Y}}$ dans $\mathcal{H}_2$; si $h_{\mathrm{Y}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{Y}}$, Ψh_{Y} est de degré $g_{\mathrm{F}} = 0$, a une image dans $\mathcal{H}_\infty$ et cette image est nulle si et seulement si $\overset{-1}{\xi} h_{\mathrm{Y}} = 0$; si $\overset{-1}{\xi}(y)$ est connexe pour tout $y \in \mathrm{Y}$,

---

(*) Séance du 30 mai 1949.

([1]) J. Leray, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 1366 et 1419; *Colloque de Topologie algébrique* (sous presse); *Journ. math.* (à paraître). On trouvera la définition de la terminologie dans H. Cartan, *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 148, le n° 1 de cette Note étant modifié comme suit : n peut être < 0; $\mathrm{A} = \lim\limits_{n \to -\infty} \mathrm{A}_n$; la filtration $f(a)$ de $a \in \mathrm{A}$ est le plus grand entier n tel que $a \in \mathrm{A}_n$.

alors Ψ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_Y$ sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_2$ de degré $g_F = 0$ et $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_X$ de filtration $f_F = 0$. Quand $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_Y \otimes \mathcal{H}_F$; $\Psi h_Y = h_Y \otimes 1$.

2. *Soit* $\overline{G}$ *un groupe de Lie compact* opérant sur X et Y et dont les éléments commutent avec ξ; $\overline{g} \in \overline{G}$ représente ξ sur lui-même et définit donc un automorphisme des algèbres $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_Y$ et $\mathcal{H}_r$; cet automorphisme respecte filtrations et degrés; il commute avec δ_r, Φ, Ψ et $\overset{-1}{\xi}$; il ne change pas quand $\overline{g}$ décrit une composante connexe de $\overline{G}$: *soit* G *la composante connexe de l'unité de* $\overline{G}$ (*cf.* n° 3); $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_Y$ *et* $\mathcal{H}_r$ *sont des représentations linéaires du groupe fini* $\Gamma = \overline{G}/G$; *les composantes irréductibles de ces représentations linéaires sont annulées ou représentées isomorphiquement par* δ_r, Φ, Ψ, $\overset{-1}{\xi}$.

3. *Soit* G *un groupe de Lie compact et connexe* opérant sur X et Y et dont les éléments commutent avec ξ. Nous avons récemment défini ([2]) *un espace vectoriel gradué* Δ, *de même rang que* G, *dont les éléments* δ *sont des différentielles de* $\mathcal{H}_X$ *et* $\mathcal{H}_Y$; il existe une extension de la définition de δ ayant les propriétés suivantes : δ *est une différentielle de chacune des algèbres* $\mathcal{H}_r$; *quand* $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_Y \otimes \mathcal{H}_F$, *la définition de* δ *sur* $\mathcal{H}_2$ *résulte de sa définition sur* $\mathcal{H}_Y$ *et de la convention :* $\delta = 0$ *sur* $\mathcal{H}_F$; $\delta\Phi = 0$; δ *commute avec* Ψ, δ_r *et* $\overset{-1}{\xi}$; δ *ne modifie pas* g_F *et ne diminue pas* f_F; si δ est homogène de degré $q < 0$, δ diminue g_Y et g_X de q et diminue f_Y de q au plus. Les éléments de G qui appliquent identiquement Y sur lui-même constituent un sous-groupe invariant de G, dont la composante connexe de l'unité sera notée G′ (*cf.* n° 4); les différentielles δ' associées à G′ constituent un sous-espace Δ' de Δ; si $\delta' \in \Delta'$, δ' est nulle sur $\mathcal{H}_Y$ et $\mathcal{H}_r$; δ' augmente f_F.

4. *Soit* G′ *un groupe de Lie compact et connexe, opérant sur* X *et transformant* $\overset{-1}{\xi}(y)$ *en lui-même, quel que soit* $y \in Y$. *Soit* Δ' *l'espace vectoriel gradué, de même rang que* G′, *constitué par les différentielles* δ' *associées à* Δ' : si $\delta' \in \Delta'$, δ' est une différentielle de $\mathcal{H}_X$ et $\mathcal{H}_{\overset{-1}{\xi}(y)}$; il existe une extension (autre que celle du n° 3) de la définition de δ' ayant les propriétés suivantes : δ' *est une différentielle de chacune des algèbres* $\mathcal{H}_r$; *quand* $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_Y \otimes \mathcal{H}_F$, *la définition de* δ' *sur* $\mathcal{H}_2$ *résulte de sa définition sur* $\mathcal{H}_F$ *et de la convention* $\delta' = 0$ *sur* $\mathcal{H}_Y$; $\delta'\Psi = \delta'\overset{-1}{\xi} = 0$; δ' *commute avec* Φ *et* δ_r; δ' *ne modifie pas* g_Y *et ne diminue pas* f_Y; si δ' est homogène de degré $q < 0$, δ' diminue g_F et g_X de q et augmente f_F d'au moins q.

5. *Supposons que* ξ *soit la projection d'un groupe de Lie compact et connexe* X *sur l'espace homogène* $Y = X/F$ *quotient de* X *par un sous-groupe fermé* F : $\xi(xF)$ *est un point de* Y.

a. On peut choisir $G = X$, $g \in G$ transformant $x \in X$ en gx; le n° 3 permet de compléter comme suit le théorème qu'énonce ([2]) : *Supposons* F *connexe*;

$$\mathcal{H}_X = \mathcal{H}''_X \otimes \wedge \mathcal{H}'_X; \quad \mathcal{H}_Y = \mathcal{H}''_Y \otimes \wedge \mathcal{H}'_Y; \quad \mathcal{H}_r = \mathcal{H}''_r \otimes \wedge \mathcal{H}'_r;$$

([2]) *Comptes rendus*, 228, 1949, p. 1545.

$\bar{\xi}^1$ *est un isomorphisme de l'algèbre extérieure* $\wedge \mathcal{H}'_Y$ *sur* $\wedge \mathcal{H}'_X$; $\bar{\xi}^1$ *annule les éléments* de $\mathcal{H}''_Y$ *de degrés* > 0 ;

$$\mathcal{H}'_2 = \mathcal{H}'_\infty \simeq \mathcal{H}'_X \simeq \mathcal{H}'_r \ (= 0 \textit{ si } F \textit{ a même rang que } X)\ ; \quad \partial_r(\wedge \mathcal{H}'_r) = 0\ ;$$
$$\mathcal{H}''_2 = \mathcal{H}''_Y \otimes \mathcal{H}_F\ ; \quad \partial_r \mathcal{H}''_r \subset \mathcal{H}''_r\ ;$$

$\mathcal{H}''_{r+1}$ *est l'anneau d'homologie de* $\mathcal{H}''_r$; $\mathcal{H}''_\infty$ *est l'algèbre graduée de l'algèbre filtrée* $\mathcal{H}''_X$, *qui est une algèbre extérieure.*

b. On peut prendre pour G le *normalisateur* N_F de F, c'est-à-dire l'ensemble des $n \in X$ tels que $Fn = nF$, en convenant que $n \in G$ transforme $x \in X$ en $n^{-1}xn$; les n^os^ 2, 3 et 4 fournissent un ensemble de renseignements que complète la Thèse de J.-L. Koszul ([3]).

D'autre part, l'application $\xi(x) \to \xi(n^{-1}xn)$ de Y sur lui-même a pour nombre de Lefschetz la caractéristique d'Euler de Y si $n \in F$, 0 si non; en particulier, vu les travaux de H. Hopf, H. Samelson, E. Stiefel ([4]) : *Si les éléments de* $\mathcal{H}_Y$ *sont tous de degré pair* ([5]), $\mathcal{H}_Y$ *est une représentation linéaire du groupe* N_F/F, *équivalente à m fois l'algèbre de ce groupe, qui est fini; m est l'indice de* $N_T \cap N_F$ *dans* N_T, T *étant l'un des sous-groupes abéliens maximum de* F.

CYTOLOGIE. — *Nombres chromosomiques dans le genre* Holcus *L.* Note (*) de M. RENÉ DE LITARDIÈRE.

Nous avons signalé en novembre 1948 ([1]) l'existence de deux Graminées, les *Airopsis tenella* (Cav.) Coss. et DR. et *Periballia lævis* (Brot.) Asch. et Græbn., présentant un nombre chromosomique très faible et aberrant dans la famille, $2n = 8$. Nous venons de découvrir une autre espèce, appartenant aussi à la tribu des Avénées, qui possède $2n = 8$. Il s'agit de l'*Holcus Gayanus* Boiss. (= *H. tenuis* J. Gay, non Trin. = *H. Durieui* Steud.), type hispano-lusitanien. Notre matériel qui nous a été adressé par la Station agronomique portugaise provient de la Serra do Gerês, à Abrotea (Minho).

L'*H. Gayanus*, comme les *Airopsis tenella* et *Periballia lævis*, présente des chromosomes allongés, du type festucoïde.

Jusqu'ici, à notre connaissance, deux espèces seulement du genre *Holcus* avaient été examinées du point de vue chromosomique : les *H. mollis* L. et *H. lanatus* L. Nous en avons repris l'étude. Dans des échantillons de l'*H. mollis* provenant de l'Ardèche (Burzet, entre la Boite et la Brousse, clairière

---

([3]) *Comptes rendus*, **228**, 1949, p. 288 et 457.

([4]) *Comm. Math. helv.*, **13**, 1940, p. 240; **14**, 1941, p. 350; **15**, 1942, p. 59.

([5]) Cette condition est vérifiée, quand F a le rang de X, si l'hypothèse de G. Hirsch que Yen Chih-ta a cru établie (*Comptes rendus*, **228**, 1949, p. 629) est exacte.

(*) Séance du 30 mai 1949.

([1]) *Comptes rendus*, **227**, 1948, p. 1071-1072.