TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur l'anneau de cohomologie des espaces homogènes.* Note (*) de M. **Jean Leray.**

Nous désignerons par $(N_1), \ldots, (N_7)$ sept Notes antérieures [1].

1. *Soit* X *un espace compact, simplement connexe sur lequel opère un groupe de Lie compact* Y *dont aucune transformation autre que l'identité ne laisse fixe de point de* X : $y \in Y$ transforme $x \in X$ en $xy \in X$. Par exemple X peut être un groupe de Lie compact et Y un sous-groupe fermé de X. Soit $W = X/Y$ la base de X fibré par les xY; il s'agit d'étudier $\mathcal{H}_W$, algèbre de cohomologie de W relative à un corps commutatif de caractéristique o.

Y est localement isomorphe au produit d'un groupe abélien par des groupes simples; s'ils appartiennent tous aux quatre grandes classes, nous dirons que Y *n'est pas exceptionnel.*

On nomme *toroïde* tout groupe de Lie compact connexe et abélien : c'est un produit de cercles. Soit T un toroïde maximum de Y; soit N_T le normalisateur de T, c'est-à-dire l'ensemble des éléments n de Y, ou de X quand Y est sous-groupe de X, tels que $nT = Tn$; soit N'_T la composante connexe de N_T contenant 1. Si $n \in Y \cap N_T$ l'application $x \to xn$ applique xY sur lui-même et xT sur xnT; si nous posons

$$V = Y/T \subset U = X/T, \qquad W = X/Y = U/V,$$

le groupe $Y \cap N_T$ opère donc sur U, V et applique identiquement W sur lui-même; son sous-groupe $Y \cap N'_T$ applique identiquement $\mathcal{H}_U$ et $\mathcal{H}_V$ sur eux-mêmes; le groupe fini

$$\Phi_Y = (Y \cap N_T)/(Y \cap N'_T) \simeq (YN'_T \cap N_T)/N'_T \subset N_T/N'_T$$

opère donc sur $\mathcal{H}_U$, $\mathcal{H}_V$ et transforme identiquement $\mathcal{H}_W$.

La preuve du théorème de (N_7), légèrement modifiée, donne :

Théorème 1. — *Supposons* Y *non exceptionnel (connexe ou non). L'application canonique de* $U = X/T$ *sur* $W = X/Y$ *a pour réciproque un isomorphisme de* $\mathcal{H}_W$ *sur l'ensemble des éléments de* $\mathcal{H}_U$ *invariants par* Φ_Y.

Corollaire 1. — *Soit* Z *un sous-groupe de* Y *ayant même rang que* Y : X/Z *a pour fibre* Y/Z *et pour base* X/Y. *Supposons* Y *non exceptionnel : l'application de* X/Z *sur* X/Y *a pour réciproque un isomorphisme de* $\mathcal{H}_{X/Y}$ *dans* $\mathcal{H}_{X/Z}$. *Supposons en outre* Y *connexe et* Z *non exceptionnel : l'application topologique de* Y/Z *dans*

(*) Séance du 18 juillet 1949.

[1] (N_7) : *Comptes rendus*, **228**, 1949, p. 1902 donne les références de $(N_1), \ldots, (N_6)$. Ces Notes contiennent les errata : t. **223**, p. 396, formule (8), *au lieu de* $\varpi(t)$, *lire* $t\varpi(t)$, t. **228**, p. 1786, ligne 3, *au lieu de* $\mathcal{H}_{\prec}$, *lire* $\mathcal{H}'_Y$; p. 1904, ligne 2, *au lieu de* $\mathcal{H}_W \otimes \mathcal{H}_U$; *lire* $\mathcal{H}_W \otimes \mathcal{H}_V$; ligne 15, *au lieu de* $\mathcal{H}_{X/Y} \oplus \mathcal{H}_{Y/Z}$, *lire* $\mathcal{H}_{X/Y} \otimes \mathcal{H}_{Y/Z}$.

X/Z *a pour réciproque un homomorphisme de* $\mathcal{H}_{X/Z}$ *sur* $\mathcal{H}_{Y/Z}$; $\mathcal{H}_{X/Z}$ *et* $\mathcal{H}_{X/Y} \otimes \mathcal{H}_{Y/Z}$ *sont des modules isomorphes.*

Corollaire 2. — $\mathcal{H}_W$ *ne dépend que de* X *et* $Y \cap N_T$.

Soit à *chercher tous les* $\mathcal{H}_W$ *correspondant à* X *donné et* Y *quelconque, non exceptionnel;* d'après le corollaire 2 on ne modifie pas l'ensemble des $\mathcal{H}_W$ en se limitant aux Y dont la composante connexe est abélienne; le théorème 1 ramène cette recherche à la suivante : *soit* T *un toroïde de* Y*; soit* $U = X/T$*; déterminer* $\mathcal{H}_U$ *et la façon dont le groupe fini* N_T/N'_T *opère sur* $\mathcal{H}_U$. On peut appliquer la théorie due à W. Gysin des espaces fibrés par des sphères (*voir* n°3).

2. *Supposons que* X *soit un groupe et* Y *un de ses sous groupes :* W *est un espace homogène*. Soit R un toroïde maximum de X contenant T; $U = X/T$ a pour fibre le toroïde R/T et pour base X/R; $\mathcal{H}_{X/R}$ est déterminé par le lemme de (N_7) quand X n'est pas exceptionnel; d'où une autre façon d'appliquer la théorie de W. Gysin.

Mais il faudra procéder autrement pour voir comment N_T/N'_T opère sur $\mathcal{H}_U$: envisageons le centre de N'_T : c'est l'intersection des toroïdes maximum de X contenant T; soit S celle des composantes connexes de ce centre qui contient l'unité; S est un toroïde;

$$T \subset S \subset N'_T = N'_S \subset N_T \subset N_S;$$

on utilise les invariants topologiques que le n° 1 de (N_6) *attache à l'application canonique de l'espace* X/T, *fibré par le toroïde* S/T, *sur sa base* X/S; *le groupe* N_T *opère sur* X/T, S/T *et* X/T; *il en résulte, d'après le n° 2 de* (N_6), *que le groupe fini* N_T/N'_T *opère sur ces invariants.*

Il faut étudier préalablement l'algèbre $\mathcal{H}_{X/S}$ et la façon dont le groupe fini N_S/N'_S opère sur elle; il suffit de traiter le cas où X est *simple*; voici un premier renseignement.

Théorème 2. — *Soit* X *un groupe simple non exceptionnel, de rang* l*; soit* S *un toroïde singulier de rang* $l-1$, *c'est-à-dire appartenant à plusieurs toroïdes de rang* l : $\mathcal{H}_{X/S} = \mathcal{H}'' \otimes \bigwedge \mathcal{H}'$; $\mathcal{H}''$ *est* $\mathcal{H}_{X/R}$ *mod. l'idéal engendré par les éléments de degré* 2 *de* $\mathcal{H}_{X/R}$ *qui correspondent canoniquement aux caractères de* T *nuls sur* S*;* $\bigwedge \mathcal{H}'$ *est l'algèbre extérieure d'un module* $\mathcal{H}'$ *de rang* 1, *qui est appliqué isomorphiquement sur le module des éléments primitifs de* $\mathcal{H}_X$ *de degré maximum par l'homomorphisme réciproque de l'application canonique de* X *sur* X/S*; cet homomorphisme annule les éléments de* $\mathcal{H}''$ *de degrés* > 0. Un toroïde non singulier de rang $l-1$ n'a en général pas ces propriétés.

3. *Espace fibré par une sphère.* — (N_3) permet de compléter *la théorie de W. Gysin* (²) *:*

Théorème 3. — *Soit* ξ *la projection d'un espace fibré* X *de dimension* D *sur sa base* Y *de dimension* $D-d$, *la fibre ayant même algèbre de cohomologie qu'une*

(²) *Comm. math.-helv.*, **14**, 1941, p. 61.

sphère de dimension d; on suppose que X, Y *et* F *sont des multiplicités compactes et orientables. Les polynomes de Poincaré* X(*s*) *et* Y(*s*) *de* X *et* Y *s'expriment en fonction du polynome de Poincaré* Q(*s*) *de* $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y$:

$$X(s)=Q(s)+s^D Q(s^{-1}),\qquad Y(s)=[Q(s)-s^{D+1}Q(s^{-1})].[1-s^{d+1}]^{-1}.$$

Les éléments $h_Y\in\mathcal{H}_Y$ *tels que* $\overset{-1}{\xi}h_Y=0$ *sont les multiples de l'un d'eux, m, dont le degré est d* + 1. *Il existe un isomorphisme canonique, qui diminue le degré de d, du* $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y$*-module* $\mathcal{H}_X/\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y$ *sur l'annulateur de m. Soit* $h_X^p\in\mathcal{H}_X$; *degré* $h_X^p=p$; *pour que* $h_X^p\in\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y$, *il faut et il suffit que* $h_X^p.\overset{-1}{\xi}h_Y^{D-p}=0$ *pour tout* $h_Y^{D-p}\in\mathcal{H}_Y$ *de degré* D − *p. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes*

$$\mathcal{H}_F=F\mathcal{H}_X,\qquad X(s)=(1+s^d)Y(s),\qquad Q(s)=Y(s),\qquad m=0;$$

elles sont réalisées en particulier quand d est pair. Pour qu'il existe un module $\mathfrak{L}$ *tel que*

$$\mathcal{H}_X=\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y\otimes\wedge\mathfrak{L},$$

il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient simultanément réalisées :

a. les multiples de m constituent l'annulateur d'un élément n de $\mathcal{H}_Y$;

b. il existe un élément de $\mathcal{H}_X$, *étranger à* $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}_Y$, *de carré nul et de degré : d* + *degré n.*

On a : rang $\mathfrak{L}=1$; *degré* $\mathfrak{L}=d+$ *degré n.*

Si d + *degré n est impair, b est toujours vérifié; La condition a équivaut à :*

a'. l'annulateur de m est l'ensemble des multiples d'un élément n de $\mathcal{H}_Y$.

M. **Roger Heim** présente la traduction française, rédigée par M. Jacques Duché, de l'Ouvrage : *Antagonismes microbiens et substances antibiotiques*, de M. **Selman A. Waksman**, Correspondant de l'Académie.

M. **Costantino Gorini** fait hommage d'un fascicule : *Nuovi contributi alla mia dottrina microbiologica dell' insilamento lattico.*

CORRESPONDANCE.

M. **Corneille Heymans**, élu Correspondant pour la Section de Médecine et Chirurgie, adresse ses remercîments.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Mémoires de l'Institut français d'Afrique Noire.* Centre du Cameroun. Série : Populations, n° 1. *Inventaire ethnique du Sud-Cameroun*, par I. Dugast.

2° Faculté de Philosophie de l'Université de Skopje. Section des Sciences naturelles. *Annuaire*, Tome I.