ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 20 FÉVRIER 1956.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON BINET.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynomiaux* (¹). Note de M. JEAN LERAY.

Le problème de Cauchy est résolu par une transformation fonctionnelle, définie par une quadrature et opérant sur la solution d'un problème de Cauchy particulier, relatif à une autre équation à coefficients polynomiaux ; l'ordre de l'une des équations est le degré des coefficients de l'autre : si l'équation est à coefficients linéaires, le problème de Cauchy est réduit à un système différentiel ordinaire et à une quadrature.

1. Soit X l'espace affine de dimension l sur le corps C des nombres complexes. Soit $s(x)$ une fonction holomorphe de $x \in X$, qui s'annule sur un morceau d'hypersurface de X; notons V un petit voisinage de ce morceau d'hypersurface. Notons Ξ le dual de l'espace des vecteurs de X. Soit $a(\xi, x)$ un polynome défini sur $\Xi \times X$, de degrés $m+q$ en ξ et q en x. Notons $h(\xi, x)$ sa partie principale en ξ. Soit enfin $v(x)$ une fonction holomorphe sur V.

Posons *le problème de Cauchy* d'inconnue $u(x)$:

$$(1) \qquad a\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)u(x) = v(x); \qquad u(x) \text{ s'annule } m+q \text{ fois pour } s(x) = 0.$$

Par hypothèse l'hypersurface où $s(x) = 0$ ne sera pas caractéristique :

$$(2) \qquad h\left(\frac{\partial s}{\partial x}, x\right) \neq 0 \quad \text{pour } s(x) = 0.$$

THÉORÈME. — *La solution de ce problème de Cauchy est*

$$(3) \qquad u(z) = J[w(\xi', x)v(x)].$$

La transformation fonctionnelle J est définie au n° 2 par des quadratures; J dépend seulement de l'hypersurface où $s(x) = 0$.

La fonction $w(\xi', x)$ est définie au n° 3, comme solution d'un autre problème de Cauchy; $w(\xi', x)$ dépend seulement du polynome $a(\xi, x)$.

Nota. — Tout problème de Cauchy se ramène aisément à un problème dont les données de Cauchy sont nulles.

2. La transformation J. — *Préliminaires.* — Les diverses expressions de J que nous donnerons sont des intégrales calculées dans des espaces analytiques complexes. Elles porteront sur des formes différentielles holomorphes, qui seront, par rapport aux différentielles, de degré maximum, c'est-à-dire égal à la dimension complexe de l'espace ; ces formes sont donc fermées et nulles sur toute hypersurface analytique. Une telle hypersurface sera donnée; la théorie des espaces fibrés montrera que le groupe d'homologie de l'espace, relatif à cette hypersurface, pour la dimension réelle égale à la dimension complexe de l'espace, a le rang 1 ; ce groupe, qui est utilisé en coefficients entiers, a donc une base, définie au produit près par ± 1 ; ce signe étant choisi, nous nommerons cette base, *base d'homologie de l'espace relative à l'hypersurface.* Notre intégrale sera prise sur un cycle arbitraire de cette base.

Notations. — Les fonctions linéaires $\xi'.x$ de $x \in X$ constituent un espace vectoriel Ξ' de dimension $l+1$; son quotient par le sous-espace des fonctions constantes sur X est Ξ. Si x a les coordonnées $(x_1, \ldots, x_l)$, alors

$$\xi'.x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l;$$

l'image canonique de $\xi' = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l) \in \Xi'$ dans Ξ est $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)$. A l'espace vectoriel Ξ' est associé un espace projectif $\Xi'^{\star}$ de dimension l : c'est l'espace des hyperplans de X.

Dans l'espace produit $\Xi' \times X$ envisageons un domaine D' qui soit le produit de V par un domaine convexe de Ξ', ayant les propriétés que voici : son image dans $\Xi'^{\star}$ contient les hyperplans tangents à $s(x) = 0$; s'il contient ξ', il contient $\tau\xi'$ quand $\tau \in C$, $|\tau| \geqq 1$; $\|\xi'\|$ y est grand. J transforme en fonctions holomorphes de $z \in V$ les fonctions $f(\xi', x)$ holomorphes sur D' et à croissance polynomiale : il existe une constante m, dépendant de f, telle que

$$\|\xi'\|^m f(\xi', x) \text{ est borné pour } \|\xi'\| \to \infty.$$

Notons $\tilde{f}(\xi, x)$ la fonction de x et de l'image $\xi \in \Xi$ de ξ' qui vérifie

$$\tilde{f}(\xi, x) = f(\xi', x) \qquad \text{pour} \quad \xi'.x = 0.$$

La définition de J[f] est la suivante : il existe une base d'homologie α' de D' relative à la réunion des trois hypersurfaces

$$s(x) = 0; \qquad \xi'.x = 0; \qquad \xi'.z + \lambda = 0 \qquad (\lambda = \text{const.}); \tag{4}$$

$$J[f(\xi', x)] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\alpha'} f(\xi', x) \exp(\xi'.z)\, d\xi_0 \ldots d\xi_l\, dx_1 \ldots dx_l \qquad \text{si} \quad l < m; \tag{5}$$

$$J[f(\xi', x)] = b\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) J[b^{-1}(\xi) f(\xi', x)],$$

où $b(\xi)$ est l'un des polynomes tels que le second membre soit défini par (5) : ce second membre est indépendant du choix de b.

Les propriétés de J s'obtiennent aisément, sauf la dernière qui résulte d'une récurrence sur l : $J[f]$ est indépendant du choix de la constant λ;
pour $s(z)=0$, $J[f]$ s'annule m fois de plus que $f(\xi', x)$ pour $s(x)=0$;

$$\frac{\partial}{\partial z_k} J[f] = J[\xi_k f] \quad (1 \leqq k \leqq l);$$

$$z_k J[f] = J\left[x_k \tilde{f} - \frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right]; \qquad J[f] = J\left[\tilde{f} - \frac{\partial f}{\partial \xi_0}\right];$$

$$J\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right] = J[\xi_k \tilde{f}] \quad \text{si} \quad f(\xi', x) = 0 \quad \text{pour} \quad s(x) = 0;$$

$$J[f(x)] = f(z).$$

La définition de $J[f]$ *se simplifie* dans certains cas particuliers. Supposons f fonction de (ξ, x); soit D l'image de D′ dans $\Xi \times X$; il existe une base d'homologie α de D relative à la réunion des deux hypersurfaces

$$(6) \qquad s(x) = 0; \qquad \xi.(z-x) + \lambda = 0;$$

$$(7) \quad J[f(\xi, x)] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_\alpha f(\xi, x) \exp[\xi.(z-x)]\, d\xi_1 \ldots d\xi_l\, dx_1 \ldots dx_l \quad \text{si} \quad l - 1 < m.$$

Supposons $f(\xi', x)$ homogène en ξ' de degré $-m$; m est entier. Soit $D'^\star$ l'image de D′ dans $\Xi'^\star \times X$; il existe une base d'homologie $\alpha'^\star$ de $D'^\star$ relative à la réunion des trois hypersurfaces (4), où $\lambda = 0$;

$$(8) \quad J[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\alpha'^\star} \frac{(\xi'.z)^{m-l-1}}{(m-l-1)!} f(\xi', x) \sum_{k \geqq 0} (-1)^k \xi_k\, d\xi_0 \ldots \widehat{d\xi_k} \ldots d\xi_l\, dx_1 \ldots dx_l$$

si $l < m$; $\widehat{d\xi_k}$ signifie la suppression de $d\xi_k$. Pour $l = m$, $J[f]$ s'exprime par une intégrale étendue à la partie du bord de $\alpha'^\star$ contenue dans l'hyperplan $\xi'.z = 0$.

Supposons enfin f fonction de (ξ, x), homogène de degré $-m$ en ξ; soit $\Xi^\star$ l'espace projectif de dimension $l-1$ associé à l'espace vectoriel Ξ de dimension l; soit $D^\star$ l'image de D dans $\Xi^\star \times X$; il existe une base d'homologie $\alpha^\star$ de $D^\star$ relative à la réunion des deux hypersurfaces (6), où $\lambda = 0$;

$$(9) \quad J[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\alpha^\star} \frac{[\xi.(z-x)]^{m-l}}{(m-l)!} f(\xi, x) \sum_{k \geqq 0} (-1)^k \xi_k\, d\xi_1 \ldots \widehat{d\xi_k} \ldots d\xi_l\, dx_1 \ldots dx_l$$

si $l \leqq m$; si $l - 1 = m$, $J[f]$ s'exprime par une intégrale étendue à la partie du bord de $\alpha^\star$ contenue dans la quadrique $\xi.(z-x) = 0$.

3. La fonction $w(\xi', x)$. — *Notations.* — Notons X′ l'espace dual de Ξ' : le produit de $\xi' = (\xi_0, \ldots, \xi_l) \in \Xi'$ par $x' = (x_0, \ldots, x_l) \in X'$ est le nombre

$$\xi'.x' = \xi_0 x_0 + \ldots + \xi_l x_l;$$

X est donc l'hyperplan de X′ où $x_0 = 1$.

Soit $a(\xi, x')$ l'un des polynomes, définis sur $\Xi' \times X$, qui vérifient les conditions suivantes : la restriction de $a(\xi, x')$ à $\Xi \times X$ est le polynome $a(\xi, x)$

donné au n° 1; les degrés en ξ et en x', d^0_ξ et $d^0_{x'}$, de chacun de ses monomes vérifient les inégalités

$$d^0_\xi \leqq m + d^0_{x'}; \qquad d^0_{x'} \leqq q.$$

Notons $H(\xi, x')$ la partie principale en x' de $a(\xi, x')$; $H(\xi, x')$ et $a(\xi, x')$ ont la même partie principale $h(\xi, x')$ en ξ; elle est homogène, de degrés $m+q$ en ξ et q en x'; sa restriction à $\Xi \times X$ est la partie principale, déjà notée $h(\xi, x)$, de $a(\xi, x)$ en ξ. Nous choisissons D assez petit pour que l'hypothèse (2) implique

$$H(\xi, x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad (\xi, x) \in D;$$

les données du problème de Cauchy suivant ne sont donc pas caractéristiques.

La fonction $w(\xi', x)$ est définie dans D' par le problème de Cauchy :

$$a\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial \xi'}\right) w(\xi', x) = 1,$$

$$w(\xi', x) \text{ s'annule } q \text{ fois pour } \xi' . x = 0.$$

On vérifie que $w(\xi', x)$ a une croissance polynomiale en ξ'.

Nota. — La donnée de $a(\xi, x)$ détermine incomplètement $a(\xi, x')$, donc le problème de Cauchy précédent, donc $w(\xi', x)$. On peut lever cette indétermination comme suit : on modifie, ce qui n'altère aucun des résultats énoncés, la définition de m et q; m sera le plus grand entier et q le plus petit tels que les degrés en ξ et en x, d^0_ξ et d^0_x, des monomes de $a(\xi, x)$ vérifient

$$m + d^0_x \leqq d^0_\xi \leqq m + q.$$

$a(\xi, x')$ sera le polynome dont la restriction à $\Xi \times X$ est $a(\xi, x)$ et dont les monomes vérifient

$$m + d^0_{x'} = d^0_\xi.$$

Alors $H(\xi, x') = h(\xi, x')$; $w(\xi', x)$ est homogène de degré $-m$ en ξ'; la solution (3) du problème de Cauchy donné se calcule par l'intégrale (8), c'est-à-dire dans le produit de X par l'espace de ses hyperplans; la transformation de contact de Legendre transforme les caractéristiques de l'opérateur $a(\partial/\partial x, x)$ en celles de l'opérateur $a(\xi, -\partial/\partial \xi')$ qui sont des cônes de Ξ' de sommet zéro; ces deux opérateurs ont mêmes bicaractéristiques.

4. Équations a coefficients linéaires. — Supposons $a(\xi, x)$ linéaire en x :

$$a(\xi, x) = a_0(\xi) + \sum_{k=1}^{l} a_k(\xi) x_k.$$

Autrement dit le problème de Cauchy (1) est

$$\text{(1 bis)} \qquad a_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) + \sum_{k=1}^{l} a_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) [x_k u(x)] = v(x);$$

$$u(x) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } s(x) = 0;$$

m désigne le plus grand des degrés de $a_0(\xi), \ldots, a_l(\xi)$. Choisissons $a(\xi, x')$, non comme le dit le Nota du n° 3, mais linéaire homogène en x' :

$$a(\xi, x') = \sum_{k=0}^{l} a_k(\xi) x_k.$$

L'équation (10), qui définit $w(\xi', x)$, devient

$$\sum_{k=0}^{l} a_k(\xi) \frac{\partial w(\xi', x)}{\partial \xi_k} = 1; \tag{10 bis}$$

sa résolution se réduit à celle de son système caractéristique

$$\frac{d\xi_0}{a_0(\xi)} = \frac{d\xi_1}{a_1(\xi)} = \ldots = \frac{d\xi_l}{a_l(\xi)}. \tag{11}$$

THÉORÈME. — *Soit $\eta'(\xi', x) = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_l)$ le point de Ξ' où la courbe intégrale de (11) issue de $\xi' = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l)$ coupe l'hyperplan $\eta'.x = 0$; soit $\eta(\xi', x) = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$ la projection de $\eta'(\xi', x)$ dans Ξ. La solution du problème de Cauchy (1 bis) est*

$$u(z) = \mathrm{J}\left\{\left[a_0(\eta(\xi', x)) + \sum_{k=1}^{l} a_k(\eta(\xi', x)) x_k\right]^{-1} v(x)\right\}. \tag{3 bis}$$

5. ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS. — Supposons $a(\xi, x) = a(\xi)$ indépendant de x. Le problème de Cauchy (1) devient

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = v(x). \tag{1 ter}$$

$u(x)$ s'annule m fois pour $s(x) = 0$;

m est ici le degré de $a(\xi)$. La solution de ce problème est

$$u(z) = \mathrm{J}[a^{-1}(\xi) v(x)], \tag{3 ter}$$

où J est défini par (7) ou par (9). Cette formule, qui résout (1 *ter*) par quadratures, a été donnée par Fantappiè [2], sous une autre forme, voisine de celle qui résulte de (13), (16), (17).

Quand (1 *ter*) est un problème hyperbolique bien posé, sa solution globale par quadratures a été donnée par Herglotz, Petrowsky et Gårding; c'est [3] le produit de composition de $v(x)$ par le transformé de Laplace de $a^{-1}(\xi)$; c'est donc ce que fournissent les formules (3 *ter*) et (7) quand on y choisit α égal au produit d'une classe d'homologie non compacte de Ξ par une classe non compacte de X relative à l'hypersurface $s(x) = 0$: on peut convenir que ce choix correspond à la valeur $\lambda = \infty$ du paramètre λ dont α dépend.

6. LA FONCTIONNELLE DE FANTAPPIÈ I[h] a été définie par Fantappiè, sous le

nom de produit fonctionnel projectif de h_1 et h_2, quand $h(\xi, x) = h_1(\xi) h_2(x)$ est homogène de degré -1 en ξ et en x.

Notations. — En choisissant une origine dans X, faisons-en un espace vectoriel. Soient $X^\star$ et $\Xi^\star$ les espaces projectifs de dimensions $l-1$ associés à X et Ξ; soit $D^{\star\star}$ l'image dans $\Xi^\star \times X^\star$ du produit de deux cônes de Ξ et X, convexes, cerclés : si ξ est dans le premier, $\tau\xi$ aussi pour tout $\tau \in C$. Nous supposons ces cônes assez larges pour qu'à tout point de l'un correspondent des points de l'autre vérifiant $\xi . x = 0$.

La définition de $I[h]$ est la suivante : il existe une base d'homologie $\alpha^{\star\star}$ de $D^{\star\star}$ relative à la quadrique $\xi . x = 0$;

$$I[h] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\alpha^{\star\star}} \frac{(-\xi . x)^{m-l}}{(m-l)!} h(\xi, x) \sum_{k, r} (-1)^{k-r} \xi_k x_r \times d\xi_1 \ldots \widehat{d\xi_k} \ldots d\xi_l \, dx_1 \ldots \widehat{dx_r} \ldots dx_l, \tag{12}$$

si $l \leqq m$; sinon, pour tout polynome b tel que (12) définisse le second membre,

$$I[h] = I\left[b^{-1}(\xi) b\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) h(\xi, x) \right].$$

Les propriétés de I sont les suivantes :

$$I[\xi_k h] = I\left[\frac{\partial h}{\partial x_k} \right], \qquad I[x_k h] = I\left[\frac{\partial h}{\partial \xi_k} \right],$$

$$(-1)^{m-1}(m-1)! \, I[(\xi . z)^{-m} h(x)] = h(z) \qquad \text{si} \quad m > 0.$$

La relation entre I et J est

$$J[f(\xi', x)] = I[h(\xi, x, z)], \tag{13}$$

où, si $l < m$,

$$h(\eta, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'} (\tau t)^{l-1} f(\xi', x) \exp(\xi' . z) \, d\xi_0 \, d\tau \, dt, \tag{14}$$

$$\xi' = (\xi_0, \tau\eta_1, \ldots, \tau\eta_l), \qquad x = z + ty; \qquad (\xi', x) \in D';$$

β' est la base d'homologie, relative à la réunion des trois surfaces (4), du domaine que décrit le point de coordonnées (ξ_0, τ, t).

La définition de h se simplifie dans les cas déjà envisagés au n° 2. Si f est homogène de degré $-m$,

$$h(\xi, y, z) = \int_{\beta'^\star} \frac{(\xi' . z)^{m-l-1}}{(m-l-1)!} t^{l-1} f(\xi', x) \, d\xi_0 \, dt; \tag{15}$$

$$\xi' = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l), \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l), \qquad x = z + ty, \qquad (\xi', x) \in D'^\star;$$

$\beta'^\star$ est la base d'homologie, relative à la réunion des trois courbes (4), où $\lambda = 0$, du domaine que décrit (ξ_0, t).

Si f est indépendant de ξ_0,

$$h(\eta, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} (\tau t)^{l-1} f(\xi, x) \exp[\xi . (z - x)] \, d\tau \, dt; \tag{16}$$

$$\xi = \tau\eta, \qquad x = z + ty, \qquad (\xi, x) \in D;$$

β est la base d'homologie, relative à la réunion des deux courbes (6), du domaine que décrit (τ, t).

Si f est indépendant de ξ_0 et homogène en ξ de degré $-m$

$$h(\xi, y, z) = \int_{\beta^\star} t^{m-1} f(\xi, x)\, dt; \qquad x = z + ty; \tag{17}$$

l'arc $\beta^\star$ joint le point z au point où $s(x) = 0$.

(1) Pour plus de détails, voir *Congrès math. canadien*, 1955, notes miméographiées.

(2) Fantappiè, *Annali di mat.*, 22, 1943, p. 1-100.

(3) J. Leray, *Comptes rendus*, 234, 1952, p. 1112.

THERMOCINÉTIQUE. — *Convection calorifique dans un conduit en régime d'écoulement turbulent.* Note (*) de M. **Gustave Ribaud**.

L'auteur montre que, pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl, la conception d'une zone purement laminaire à la paroi conduit à des valeurs nettement trop faibles du coefficient de convection. Il rappelle une formule, proposée antérieurement par lui, qui s'accorde très bien avec les résultats expérimentaux.

En 1940 nous avons discuté le problème de la convection de la chaleur dans un conduit circulaire en régime d'écoulement permanent turbulent (1) et proposé une expression nouvelle du coefficient de convection :

$$\alpha_0 = \frac{Q}{t_0} = \frac{\dfrac{fC}{u_0}}{1 + 0{,}75\left(P^{\frac{2}{3}} - 1\right)} \tag{1}$$

dans laquelle t_0 est la température dans l'axe du conduit, u_0 la vitesse sur l'axe, f le frottement unitaire à la paroi, C la chaleur spécifique à pression constante et P le nombre de Prandtl du fluide en écoulement.

De nombreuses autres formules ont été proposées depuis; nous nous proposons de discuter ici celle proposée par Martinelli (2) qui paraît adoptée présentement par les spécialistes américains (3).

Dans notre étude (1), pour parer à la discontinuité de températures que l'on rencontre dans la théorie de Prandtl, nous nous sommes efforcé de remplacer la courbe des vitesses dans l'ensemble de la couche limite *et de la zone de transition* par une expression unique s'étendant jusqu'à l'entrée du noyau turbulent. Nous avons montré en particulier que cette expression pouvait s'écrire

$$u = \frac{f\delta''}{\mu} \int_0^{\frac{y}{\delta''}} \frac{d\left(\dfrac{y}{\delta''}\right)}{1 + \left(\dfrac{y}{\delta''}\right)^3}, \tag{2}$$