ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy.* Note (*) de M. **Jean Leray.**

La solution $u(x)$ du problème de Cauchy est étudiée près de la variété S qui porte les données de Cauchy, quand celle-ci est caractéristique en certains de ses points : $u(x)$ est la projection d'une fonction holomorphe; $u(x)$ se ramifie sur la caractéristique tangente à S; $u(x)$ est algébroïde, sauf dans des cas exceptionnels.

1. Notations. — Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe l; x désigne un de ses points, dont les coordonnées locales sont notées $(x_1, \dots, x_l)$. Soit $a(x, \partial/\partial x)$ un opérateur différentiel holomorphe d'ordre m :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j_1+\ldots j_l = j \leq m} a_{j_1\ldots j_l}(x) \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_l^{j_l}},$$

les $a_{j_1\ldots j_l}(x)$ étant des fonctions holomorphes, à valeurs numériques complexes. Soit S une sous-variété analytique complexe de X, régulière, de dimension complexe $l-1$: localement S a pour équation

$$S: \quad s(x) = 0,$$

$s(x)$ étant une fonction holomorphe, à valeurs numériques complexes, telle que $s_x \neq 0$;

$$s_x = \frac{\partial s}{\partial x}$$

désigne le covecteur, ou vecteur covariant, de composantes

$$s_{x_1} = \frac{\partial s}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad s_{x_l} = \frac{\partial s}{\partial_{x_l}}.$$

On suppose que S n'est pas une variété caractéristique de $a(x, \partial/\partial x)$. Soit $b(x, \partial/\partial x)$ un opérateur différentiel d'ordre 1, holomorphe près de S et pour lequel S n'est caractéristique en aucun de ses points. Soient $v(x)$ et $w_j(x)$ des fonctions, à valeurs numériques complexes, respectivement holomorphes sur X et sur S; $j = 0, \ldots, m-1$.

Le problème de Cauchy s'énonce

$$(1) \quad \begin{cases} a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = v(x); \\ u(x) = w_0(x), \qquad b\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = w_1(x), \qquad \ldots, \\ \left[b\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{m-1} u(x) = w_{m-1}(x) \quad \text{sur S}. \end{cases}$$

Son inconnue $u(x)$, est une fonction à valeurs numériques complexes, holomorphe près des points non caractéristiques de S ; nous nous proposons d'étudier, près de S, son prolongement analytique.

2. Rappel des équations des caractéristiques et bicaractéristiques de l'opérateur $a(x, \partial/\partial x)$. — Un élément de contact d'ordre 1 de X a les coordonnées homogènes (x, p) : p est un covecteur d'origine x, défini au produit près par un nombre complexe. La variété S, d'équation $s(x) = 0$, possède l'élément de contact (x, p) si

$$s(x) = 0, \qquad p \text{ est parallèle à } s_x.$$

Un vecteur dx d'origine x appartient à cet élément de contact si

$$p.dx = 0,$$

$$p.dx = p_1\,dx_1 + \ldots + p_l\,dx_l$$

désignant le produit scalaire d'un vecteur dx et d'un covecteur p. Notons $h(x,p)$ le polynome en p, homogène de degré m

$$h(x, p) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=m} a_{j_1\ldots j_l}(x)p_1^{j_1}\ldots p_l^{j_l}; \tag{2}$$

l'élément de contact (x, p) est dit caractéristique pour $a(x, \partial/\partial x)$ si $h(x,p) = 0$. Un point x de S est dit caractéristique si l'élément de contact de S en x est caractéristique, c'est-à-dire si

$$h(x, s_x) = 0. \tag{3}$$

S est dite *variété caractéristique* si tous ses éléments de contact sont caractéristiques, c'est-à-dire si $s(x) = 0$ implique (3).

Les bandes caractéristiques de l'équation du premier ordre (3) des variétés caractéristiques sont nommées bandes bicaractéristiques : *une bande bicaractéristique* est une famille à un paramètre, t, d'éléments de contact ayant des coordonnées $[x(t), p(t)]$ qui vérifient le système différentiel :

$$dx_j = h_{p_j}(x, p)\,dt, \qquad dp_j = -h_{x_j}(x, p)\,dt, \qquad h(x, p) = 0 \tag{4}$$

dont l'une des équations différentielles est superflue. Le lieu de $x(t)$ est nommé *courbe bicaractéristique*. La direction $h_p(x, p)$ associée par (4) à l'élément de contact caractéristique (x, p) s'appelle direction bicaractéristique de cet élément; elle lui appartient.

On sait comment les bandes bicaractéristiques engendrent les caractéristiques. En particulier : les bicaractéristiques issues d'un point donné x constituent une caractéristique; c'est *le conoïde caractéristique de sommet* x; les bicaractéristiques issues des éléments de contact caractéristique de S constituent *la caractéristique* K *tangente à* S.

3. Les voisinages de S au-dessus de X. — *Définition*. — Un *voisinage* de S *au-dessus* de X est constitué par

1° une variété analytique complexe, de dimension l; on la note Φ;

2° une sous-variété analytique complexe régulière de Φ, ayant la dimension $l-1$; on la note Σ;

3° une application de Φ dans X, appelée projection, notée $x(\varphi)$ et ayant les propriétés suivantes :

$x(\varphi)$ est holomorphe;

la restriction de $x(\varphi)$ à Σ est une homéomorphie analytique de Σ sur S;

le déterminant fonctionnel $D(x)/D(\varphi)$ diffère de zéro en certains points de Σ.

Si ce déterminant s'annule, c'est donc sur un ensemble analytique Δ distinct de Σ; la projection de Δ sur X est notée $x(\Delta)$.

Nous *identifions* S à Σ, $\varphi \in \Sigma$ à $x(\varphi) \in S$ et nous disons que Φ est ramifié au-dessus de $x(\Delta)$.

Soit Φ' un second voisinage de S au-dessus de X; il est évident qu'il existe au plus une homéomorphie analytique de Φ et Φ' qui applique S sur elle-même et vérifie : $x(\varphi) = x(\varphi')$; si elle existe, nous convenons qu'elle *identifie* Φ et Φ'.

Définition. — Si Φ' est un voisinage de S dans Φ et si nous choisissons pour projection de Φ' dans X la restriction à Φ' de celle de Φ, alors nous disons que le voisinage caractéristique Φ' appartient à Φ et nous écrivons

$$\Phi' \subset \Phi.$$

Définition. — Étant donnée une fonction $u[\varphi]$, nous nommons *projection* de $u[\varphi]$ la fonction $u(x)$, en général multiforme, qui résulte de l'élimination de φ entre $u[\varphi]$ et $x(\varphi)$. Nous disons $u(x)$ *holomorphe sur* Φ quand $u(x)$ est la projection d'une fonction $u[\varphi]$ holomorphe sur Φ.

4. LES VOISINAGES CARACTÉRISTIQUES DE S. — Soit $g(x, p)$ une fonction, à valeurs numériques complexes, vérifiant les conditions suivantes :

1° $g(x, p)$ est, par rapport à p, homogène de degré 1;

2° $g(x, p)/h(x, p)$ est holomorphe près de chaque élément de contact de S et ne s'annule en aucun d'eux.

Par exemple on choisit $b(x, \partial/x)$ homogène en $\partial/\partial x$, puis

$$g(x, p) = h(x, p)\,[b(x, p)]^{1-m}.$$

Soit t un paramètre numérique complexe; le système différentiel ordinaire

$$dx_j = g_{p_j}(x, p)\,dt, \qquad dp_j = -g_{x_j}(x, p)\,dt \tag{5}$$

admet l'*intégrale première* $g(x, p)$ et *la forme différentielle invariante* $p.dx - g\,dt$; ses solutions vérifiant $g(x, p) = 0$ s'identifient aux *bicaractéristiques* (4), en changeant le choix du paramètre t.

Notons $x(t, y), p(t, y)$ la solution de (5) issue de l'élément de contact (y, s_y) de S. Modifier le choix de l'équation locale $s(y) = 0$ de S a pour seul effet de multiplier $p(t, y)$ par une fonction de y; $x(t, y)$ n'est pas altéré; $x(t, y)$ est donc défini et holomorphe pour

$$y \in S, \qquad |t| < \rho(y), \tag{6}$$

$\rho(y)$ étant une fonction positive, continue de y.

Notons φ tout couple (t, y) vérifiant (6) et Φ l'ensemble des φ : Φ est une variété analytique complexe, que $x(\varphi) = x(t, y)$ projette sur X, en appliquant identiquement S sur lui-même; $D(x)/D(\varphi) \neq 0$ en les points non caractéristiques de S. Donc Φ est un voisinage de S *au-dessus* de X; un tel voisinage sera nommé *voisinage caractéristique* de S.

5. Uniformisation de la solution du problème de Cauchy. — On peut *uniformiser* $u(x)$ comme suit :

Théorème 1. — *La solution $u(x)$ du problème de Cauchy* (1) *est holomorphe sur un voisinage caractéristique Φ de* S. *Ce voisinage Φ ne dépend que de* X, S *et h.*

Le théorème suivant justifie la dénomination « *voisinage caractéristique* » en prouvant qu'un tel voisinage *est ramifié au-dessus de la caractéristique* K *tangente à* S :

Théorème 2. — *Soit Φ un voisinage caractéristique de* S. *Près de* S, *la partie de Φ où $D(x)/D(\varphi) = 0$ est l'ensemble Δ des points $\varphi = (t, y)$ tels que y soit point caractéristique de* S. *Fibrons Δ par les fibres*

$$|t| < \rho(y), \qquad y = \text{const.};$$

chacune de ces fibres se projette dans une bicaractéristique tangente à S; *Δ se projette donc dans la caractéristique* K *tangente à* S.

Bien que S ait plusieurs voisinages caractéristiques, le théorème 1 *n'est pas ambigu,* vu le

Théorème 3. — *Soient Φ et Φ' deux voisinages caractéristiques de* S*; il en existe un troisième Φ'' tel que*

$$\Phi'' \subset \Phi, \qquad \Phi'' \subset \Phi'.$$

Chaque fibre de Δ'' appartient à une fibre de Δ et à une fibre de Δ';

$$\Delta'' \subset \Delta, \qquad \Delta'' \subset \Delta'.$$

6. Caractère algébroïde de $u(x)$ en les points ordinaires de S. — Il est facile de voir que la projection d'un voisinage caractéristique de S peut ne pas être un voisinage de S, que $x(\varphi)$ peut avoir une infinité d'inverses. Mais le théorème que voici montre que de telles singularités sont exceptionnelles.

Nommons *exceptionnels* des points x de S tels que *le conoïde caractéristique de sommet x touche* S *le long d'une courbe passant par x*; plus précisément le point x de S est exceptionnel quand il possède un élément de contact $[x, p(t)]$, fonction holomorphe de t, tel que S possède l'élément de contact de paramètre t de la bicaractéristique issue de $[x, p(t)]$; t est voisin de 0. En général, S n'a pas de point exceptionnel; nous nommons *ordinaires* les points de S non exceptionnels :

THÉORÈME 4. — *Remplaçons* X *par un voisinage suffisamment petit d'un point ordinaire de* S. *Alors :*

1° K *est un ensemble analytique, de dimension complexe* $l-1$ *;*

2° Φ *est un revêtement fini de* X, *ramifié au-dessus de* K*;*

3° *toute fonction* $u(x)$ *holomorphe sur* Φ *est algébroïde :* il existe un polynome en u, $P[u, x]$ tel que

$$P[u(x), x] = 1;$$

ses coefficients sont des fonctions holomorphes de x; son coefficient principal est 1; son degré, dit degré de ramification, est l'ordre de ce revêtement.

Les deux types les plus simples de points ordinaires, ceux par l'étude desquels débute la preuve de ces théorèmes, sont

1° les points non caractéristiques (1) de S, où le degré de ramification est 1;

2° les points caractéristiques réguliers, où ce degré est 2.

7. LES POINTS CARACTÉRISTIQUES RÉGULIERS DE S. — Soit T l'ensemble des points caractéristiques de S. Un point *caractéristique* x de S est dit *régulier* quand *sa direction bicaractéristique* $h_p(x, s_x)$, qui appartient à S, *n'appartient pas à* T; c'est-à-dire : quand *la courbe bicaractéristique* issue de l'élément de contact (x, s_x) de S *n'est pas osculatrice à* S en x. On prouve le

THÉORÈME 5. — *Remplaçons* X *par un voisinage suffisamment petit d'un point caractéristique régulier de* S. *Alors :*

1° T *est une variété analytique régulière, de dimension* $l-2$;

2° K *est une variété analytique régulière, de dimension* $l-1$, *ayant avec* S, *le long de* T, *un contact d'ordre* 1 *exactement. On peut donc définir* K *par une équation*

$$k(x) = 0 \qquad (k_x \neq 0 \text{ sur K}).$$

3° *Un voisinage caractéristique de* S *est constitué par la variété* Φ *ayant, dans l'espace de coordonnées* $(x_0, x_1, \ldots, x_l)$ *l'équation*

$$\Phi: \quad x_0^2 = k(x), \qquad \text{où} \quad x = (x_1, \ldots, x_l);$$

la projection de $(x_0, x_1, \ldots, x_l) \in \Phi$ *est* $(x_1, \ldots, x_l) \in X$; Δ *est la variété régulière d'équations*

$$\Delta: \quad x_0 = k(x) = 0;$$

les points de Φ *se projetant sur* S *constituent deux variétés régulières, dont l'une* Σ *est celle qu'on identifie à* S.

4° *Une fonction* $u(x)$ *holomorphe sur* Φ *est une fonction à deux déterminations, du type*

$$u(x) = u_1(x) \pm \sqrt{k(x)}\, u_2(x),$$

$u_1(x)$ *et* $u_2(x)$ *étant holomorphes.*

(*) Séance du 30 septembre 1957.

(1) Ils furent étudiés par CAUCHY, Mme KOWALEWSKI, J. SCHAUDER, *Fund. math.*, 24, 1935, p. 229; I. PETROWSKY, *Recueil math.* (*Mat. Sbornik*), 2e série, 44, 1937, p. 840, dont nous précisons les conclusions, pour pouvoir effectuer le prolongement analytique qui donne le théorème 5.

M. **ELIAS MELIN**, Correspondant pour la Section de Botanique, fait hommage à l'Académie de divers tirages à part de ses travaux.

L'Ouvrage suivant est présenté par M. **RENÉ PERRIN** : *Introduction à l'étude des roches métamorphiques et des gîtes métallifères*, par PIERRE LAFFITTE.

DÉSIGNATIONS.

A la majorité des suffrages, MM. **GUSTAVE RIBAUD** et **RENÉ GARNIER**, pour la Division des sciences mathématiques et physiques ; **CHARLES JACOB** et **PAUL PASCAL**, pour celle des sciences chimiques et naturelles ; **PIERRE LEJAY** et **GASTON DUPOUY**, Membres non résidants, sont désignés pour former, sous la présidence de M. le Président de l'Académie, la Commission chargée de présenter une liste de candidats à la place de Membre non résidant vacante par la mort de M. *Luc Picart*.

Dans la Délégation française au **IXe CONGRÈS SCIENTIFIQUE DU PACIFIQUE** qui se tiendra à Bangkok, du 18 novembre au 9 décembre 1957, M. **PIERRE-PAUL GRASSÉ**, empêché, est remplacé par M. **JACQUES MILLOT** (1). D'autre part, sont adjoints à la délégation MM. **R. BENOIT**, **JEAN FELDMANN** et **RAOUL SERÈNE**.

CORRESPONDANCE.

M. le **SECRÉTAIRE PERPÉTUEL** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Arithmétique des lois de probabilités*, par DANIEL DUGUÉ ;

2° *The Physical and Chemical Basis of Inheritance*, by GEORGE W. BEADLE ;

3° *Investigations into the radioactive decay of some lead and thallium isotopes. Construction of a Mass Separator systematics of Energy Levels and multipole transitions*, by GÖRAN ANDERSSON. Thèse ;

(1) Séance du 21 octobre 1957.

4° *Studies on the flocculation reactions of serum proteins*, by PER LENNART ADNER. Thèse.

5° *The zonal theory of ore deposits*, by CHARLES F. PARK;

6° XX Congreso geologico internacional. *El sistema cambrico, su paleogeografia y el problema de su base*. Tomo I, Part. 1. *The Bukoban system of East Africa*, por A. M. QUENNELL;

7° *Sources of information on Geology and Mining in the Western States*, by W. B. BEATTY and LEE LANGAN (multicopié);

8° Centre d'études économiques. *Étude sommaire sur la diffusion de quelques périodiques documentaires français à l'étranger*, par JEAN HASSENFORDER (multicopié).

ALGÈBRE. — *Sur la notation de l'Algèbre tensorielle.*

Note (*) de M. **PAUL ANGLÈS D'AURIAC**, présentée par M. Henri Villat.

Nous exposons ici une notation nouvelle en algèbre et en analyse tensorielle. L'usage nous en a paru assez souple et assez commode comme instrument de découverte de relations qu'il serait peut-être plus difficile de justifier en notations classiques. Nous résumons ici l'essentiel de cette axiomatique; des applications à divers problèmes concrets montreront ensuite son utilité effective.

Dans l'écriture classique $A_{i,j,k\ldots}$ (où l'on ne précise pas les variances) A désigne un tenseur, vecteur de l'espace : produit tensoriel d'un certain nombre d'espaces facteurs. Ces derniers sont en même nombre que les indices et sont identifiés non par la lettre employée comme indice, mais par l'emplacement de cette lettre par rapport à A.

Nous nommons cet emplacement : valence. On définit une composante de A en donnant à chaque valence l'une des valeurs qu'elle peut prendre (1, 2, 3, ...) et qui sont en même nombre que le nombre des dimensions de l'espace facteur qu'elle représente.

Les lettres choisies comme indices n'ont de sens que par comparaison entre elles.

L'identité de deux indices signifie que les deux valences prennent la même valeur l'une que l'autre et la non-identité qu'elles prennent des valeurs indépendantes.

Exemple :

$$A_{ij} + A_{ji} = B_{ij} \qquad (B_{mn} \equiv B_{nm}). \tag{1}$$

Quand l'identité d'indice se rencontre dans une expression monôme, on convient, en outre, de faire la somme de toutes les composantes obtenues en donnant à l'indice commun toutes les valeurs possibles.

C'est la contraction.