passionnantes et émouvantes), ceci au même titre et avec les mêmes effets que ce qui a lieu déjà à l'égard des événements et des acteurs des guerres et des révolutions.

C'est un nouveau vœu que j'exprime en terminant et que, je pense, vous voudrez bien approuver.

(1) *Voir* André Gillois, *Les Grandes Familles de France*, p. 216.

(2) Séance du 16 décembre 1958 à l'Académie française.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe.* Note (*) de M. Jean Leray.

Nous énonçons *les propriétés* des classes de cohomologie antérieurement notées $d^{p+\dots+r}[\omega]/ds_1^{1+p}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+r}|_{(S,S')}$. Nous notons $\partial^{p+\dots+r}[\varpi]/\partial s_1^p\dots\partial s_m^r|_{(S,S')}$ certaines d'entre elles, qui ont *les propriétés formelles des dérivées partielles* des fonctions. Nous déterminons certaines autres par *la formule de Cauchy-Fantappiè.* Enfin nous les employons à l'étude des *intégrales*, *fonctions d'un paramètre.*

Nous conservons les notations et définitions d'une Note antérieure (2).

1. Les propriétés de $d^{p+\dots+r}[\omega]/ds_1^{1+p}\wedge\dots\wedge ds_j^{1+q}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+r}|_{(S,S')}$ résultent immédiatement de cette Note : ce symbole est défini quand $\omega(x, y)$ est une forme différentielle de x, régulière près de $y\in S$ et que

$$\varphi(x)=\frac{\omega(x,y)}{s_1(x,y)^{1+p}\dots s_j(x,y)^{1+q}\dots s_m(x,y)^{1+r}}$$

est une forme de x, définie au voisinage de S, *fermée*, *nulle sur* S′, indépendante de y; ce symbole représente une classe de cohomologie, à supports arbitraires, à coefficients numériques complexes, de S rel. S′; cette classe ne dépend que de φ, S, S′; son degré est $d^0(\omega)-m$; elle est multipliée par -1 quand on permute deux des symboles ds_j^{1+q}; si $p\leqq P$, ..., $r\leqq R$,

$$\frac{d^{p+\dots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+r}}\bigg|_{(S,S')}=\frac{p!\dots r!}{P!\dots R!}\,\frac{d^{P+\dots+R}[s_1^{P-p}\dots s_m^{R-r}\omega]}{ds_1^{1+P}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+R}}\bigg|_{(S,S')};$$

$$\frac{d^{p+\dots+q+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\dots\wedge ds_{m-1}^{1+q}\wedge ds_m^{1+r}}\bigg|_{(S,S')}=r!\,\mathrm{Rés}\,\frac{d^{p+\dots+q}}{ds_1^{1+q}\wedge\dots\wedge ds_{m-1}^{1+q}}\left(\frac{\omega}{s_m^{1+r}}\right)\bigg|_{(S_1\cap\dots\cap S_{m-1}-S_m,\,S')}.$$

Si $\psi(x)$ est une forme fermée régulière sur X et si $h^\star(X)$ est sa classe de cohomologie, alors

$$\frac{d^{p+\dots+r}[\omega\wedge\psi]}{ds_1^{1+p}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+r}}\bigg|_{(S,S')}=\frac{d^{p+\dots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+r}}\bigg|_{(S,S')}.h^\star(X).$$

Soit $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$ le triplet exact de la cohomologie relative [(2), n° 5];

$$\begin{array}{ccc} H^\star(S, S') & & \\ {\scriptstyle i^\star}\downarrow & \nwarrow {\scriptstyle p^\star} & \\ H^\star(S\cap S'', S') & \xrightarrow{\partial^\star} & H^\star(S, S''\cup S') \end{array}$$

on a

$$p^\star \left.\frac{d^{p+\ldots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S, S''\cup S')} = \left.\frac{d^{p+\ldots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S, S')};$$

$$i^\star \left.\frac{d^{p+\ldots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S, S')} = \left.\frac{d^{p+\ldots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S\cap S'', S')};$$

$$(1)\quad \partial^\star \left.\frac{d^{p+\ldots+r-m}[\varpi]}{ds_1^p\wedge\ldots\wedge ds_m^r}\right|_{(S\cap S'', S')}$$
$$= (-1)^m \frac{d^{p+\ldots+r}}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\left[\frac{s_1\ldots s_m}{p\ldots r}\left(d\varpi - p\frac{ds_1}{s_1}\wedge\varpi - \ldots - r\frac{ds_m}{s_m}\wedge\varpi\right)\right]_{(S, S''\cup S')}$$

si $\varpi(x, y)$ est une forme de x, régulière près de $y\in S$ et si $\varpi(x, y)/s_1(x, y)^p\ldots s_m(x, y)^r$ est une forme indépendante de y, *fermée sur* S'', *nulle sur* S'. Enfin, si f est une application d'une autre variété analytique complexe $X^\star$ dans X et si $f^\star$ est l'application réciproque, qui transforme variétés, formes et classes de cohomologie de X en variétés, formes et classes de $X^\star$, on a

$$f^\star\left[\left.\frac{d^{p+\ldots+r}[\omega]}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S, S')}\right] = \left.\frac{d^{p+\ldots+r}[f^\star\omega]}{d(f^\star s_1)^{1+p}\wedge\ldots\wedge d(f^\star s_m)^{1+r}}\right|_{(f^\star S, f^\star S')}$$

si les $f^\star S_i$, $f^\star S'_j$ sont régulières, en position générale.

2. Cas où les S_i ont des équations globales. — Limitons-nous aux définitions et aux formules les plus simples, dont l'intérêt est de relier les définitions précédentes au calcul différentiel classique.

Cas $m=1$. — Soit $\varpi(x)$ une forme régulière sur X, telle que $ds(x)\wedge d\varpi(x)=0$; définissons

$$\left.\frac{d^p\varpi}{ds^p}\right|_{(S, S')} = \left.\frac{d^p[ds\wedge\varpi]}{ds^{1+p}}\right|_{(S, S')} = \left.\frac{d^{p-1}[d\varpi]}{ds^p}\right|_{(S, S')}$$

l'égalité des deux derniers termes résultant de la relation

$$p!\, s^{-1-p}\, ds\wedge\varpi \sim (p-1)!\, s^{-p}\, d\varpi.$$

Cas $m>1$. — Soit $\varpi(x)$ une forme régulière sur X, telle que

$$(2)\qquad ds_1(x)\wedge\ldots\wedge ds_m(x)\wedge d\varpi(x) = 0;$$

définissons de même, quels que soient $p, \ldots, r\geq 0$, la classe de cohomologie, de degré $d^0(\varpi)$:

$$\left.\frac{\partial^{p+\ldots+r}[\varpi]}{\partial s_1^p\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S, S')} = \left.\frac{d^{p+\ldots+r}[ds_1\wedge\ldots\wedge ds_m\wedge\varpi]}{ds_1^{1+p}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S, S')};$$

cette classe ne change pas quand on permute $\partial s_1^p, \ldots \partial s_m^r$.

Les propriétés de ces classes de cohomologie résultent aisément de la construction de Gelfand et Šilov. Si $\varpi(x)$ et $\pi(x)$ vérifient (2), on a *la formule de Leibnitz* :

$$\left.\frac{\partial^{P+\ldots+R}[\varpi\wedge\pi]}{\partial s_1^P\ldots\partial s_m^R}\right|_{(S,S')} = \sum_{\substack{0\leq p\leq P\\ \ldots\\ 0\leq r\leq R}} \frac{P!}{p!(P-p)!}\cdots\frac{R!}{r!(R-r)!}\left.\frac{\partial^{p+\ldots+r}[\varpi]}{\partial s_1^p\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S,S^*)}\left.\frac{\partial^{P-p+\ldots+R-r}[\pi]}{\partial s_1^{P-p}\cdots\partial s_m^{R-r}}\right|_{(S,S')}.$$

On a la formule du changement de variables : soient

$$t_1(s_1,\ldots,s_m),\quad\ldots,\quad t_m(s_1,\ldots,s_m)$$

m fonctions analytiques, telles que

$$\frac{D(t)}{D(s)}\neq 0\qquad\text{pour}\quad s_1=\ldots s_m=0;$$

$$\left.\frac{\partial^{P+\ldots+R}[\varpi]}{\partial s_1^P\ldots\partial s_m^R}\right|_{(S,S')} = \sum_{\substack{0<p+\ldots+r\leq\\ P+\ldots+R}} C_{P,\ldots,R}^{p,\ldots,r}\left.\frac{\partial^{p+\ldots+r}[\varpi]}{\partial t_1^p\ldots\partial t_m^r}\right|_{(S,S')};$$

les nombres complexes $C_{P,\ldots,R}^{p,\ldots,r}$ ne dépendant que de l'allure des fonctions $t_i(s_1,\ldots,s_m)$ pour $s_j=0$: ce sont les coefficients de la formule analogue du calcul différentiel classique. En effet :

Cas où $\varpi(x)$ est de degré nul et S′ *vide.* — L'hypothèse (2) signifie que $\varpi(x)=F[s_1(x),\ldots,s_m(x)]$; on voit aisément que

$$\left.\frac{\partial^{p+\ldots+r}[\varpi]}{\partial s_1^p\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S)}\ \text{est le produit du nombre}\ \left.\frac{\partial^{p+\ldots+r}F[s_1,\ldots,s_m]}{\partial s_1^p\ldots\partial s_m^r}\right|_{s_1=\ldots s_m=0}$$

par la classe de cohomologie unité de S.

3. La formule de Cauchy-Fantappiè [3] permet de calculer quelques résidus. Notons : X un domaine convexe d'un espace affin complexe de dimension l; Ξ l'espace vectoriel de ses fonctions linéaires, numériques complexes; $\Xi^\star$ l'espace de ses variétés planes de codimension 1 : $\Xi^\star$ est un espace projectif complexe de dimension l, image de Ξ. La valeur de $\xi\in\Xi$ en $x\in X$ est notée $\xi.x=\xi_0+\xi_1x_1+\ldots+\xi_lx_l$, $(x_1,\ldots,x_l)$ étant les coordonnés de x, $(\xi_0,\ldots,\xi_l)$ celles de ξ. Sur $\Xi^\star$, près de $\xi^\star$, image de $\xi=(\xi_0,\ldots,\xi_l)$, si $\xi_i\neq 0$, on utilise les coordonnées locales $(\xi_0/\xi_i,\ldots,\xi_l/\xi_i)$. Notons

$$\omega(x)=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_l,$$

$$\omega^\star(\xi)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\xi_k\,d\xi_0\wedge\ldots\wedge d\xi_{k-1}\wedge d\xi_{k+1}\wedge\ldots\wedge d\xi_l;$$

puisque $\xi_0^{l+1}\,d(\xi_1/\xi_0)\wedge\ldots\wedge d(\xi_l/\xi_0)=\omega^\star(\xi)$, $g(\xi)\omega^\star(\xi)$ est une forme différentielle de $\Xi^\star$ si g est homogène de degré $-l-1$. Donnons-nous un point $y \in X$; considérons la variété plane P et la quadrique Q de $\Xi^\star \times X$ que décrit le point $(\xi^\star, x)$ de $(\Xi^\star \times X)$ quand

$$\mathrm{P}: \ \xi . y = 0; \qquad \mathrm{Q}: \ \xi . x = 0.$$

Quand $\xi^\star$ décrit la variété plane $y^\star$ de $\Xi^\star$ d'équation

$$y^\star: \ \xi . y = 0,$$

munie de son orientation naturelle, alors $(\xi^\star, y)$ décrit un cycle compact de $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$; nous noterons sa classe d'homologie $(-1)^{l(l-1)/2} h(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})$; c'est une base du sous-groupe de $\mathrm{H}_c(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})$ de dimension $2l - 2$. Soit enfin $f(x)$ une fonction holomorphe sur X; la formule de Cauchy-Fantappiè et la formule du résidu donnent

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})} \frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega^\star(\xi) \wedge \omega(x)]}{d(\xi . x) \wedge [d(\xi . y)]^l}; \tag{3}$$

la classe de cohomologie figurant sous le signe $\int$ est donc $(2\pi i)^{l-1} f(y)$ fois la classe de base.

Soient p et ∂ les deux homomorphismes, appartenant à deux triplets différents d'homologie relative

$$p: \ \mathrm{H}_c(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}) \to \mathrm{H}_c(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}, \mathrm{S}); \qquad \partial: \ \mathrm{H}_c(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cup \mathrm{S}) \to \mathrm{H}_c(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}, \mathrm{S});$$

de (1) et (3) résulte que, s'il existe $h(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cup \mathrm{S}) \in \mathrm{H}_c(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cup \mathrm{S})$ tel que

$$\partial h(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cap \mathrm{S}) = p h(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q});$$

alors

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cup \mathrm{S})} \frac{d^l[f(x)\,\omega^\star(\xi) \wedge \omega(x)]}{[d(\xi . z)]^{1+l}}. \tag{4}$$

4. Dérivation d'une intégrale, fonction d'un paramètre. — Reprenons les notations de ([2]), en supposant que $m = 1$ et que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1$ dépende d'un paramètre $t \in \mathrm{T}$, dont S' et ω ne dépendent pas. Limitons-nous ici au cas où S appartient à une série *linéaire* de sous-variétés : son équation locale $s(x, y, t) = 0$ est linéaire en t; nous supposerons $s(x, y, t)/s(x, y, t')$ indépendant de y.

Soit $\omega(x, y)$ une forme régulière de $x \in X$, nulle sur S', telle que $\omega(x, y)\,s(x, y, t)^{-q}$ soit une forme *fermée* de $x \in X - S$, indépendante de y; $s^{-1}\,ds \wedge \omega$ est donc, pour $dy = dt = 0$, indépendante de t, si $q \neq 0$; nous supposons cela encore vrai pour $q = 0$.

Soient $h(\mathrm{X}, \mathrm{S} \cup \mathrm{S}')$ et $h(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ des classes d'homologie à supports compacts, de $(\mathrm{X}, \mathrm{S} \cup \mathrm{S}')$ et $(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ variant continûment avec t;

$$\dim(\mathrm{X}, \mathrm{S} \cup \mathrm{S}') = d^0(\omega); \qquad \partial: \ \mathrm{H}_c(\mathrm{X}, \mathrm{S} \cup \mathrm{S}') \to \mathrm{H}_c(\mathrm{S}, \mathrm{S}'); \qquad \dim h(\mathrm{S}, \mathrm{S}') = d^0(\omega) - 1.$$

Soit P un polynome homogène de degré p. On a *les formules de dérivation*,

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(\mathrm{X},\,\mathrm{S}\cup\mathrm{S}')}\frac{[-s(x,y,t)]^{-q}}{(-q)\,!}\,\omega(x,y)\\ &\quad=\int_{h(\mathrm{X},\,\mathrm{S}\cup\mathrm{S}')}\mathrm{P}(-s_t)\,\frac{[-s]^{-p-q}}{(-p-q)\,!}\,\omega \qquad \text{si}\quad p\leqq -q;\\ &\quad=\int_{\partial h(\mathrm{X},\,\mathrm{S}\cup\mathrm{S}')}\frac{d^{p+q-1}[\mathrm{P}(-s_t)\,\omega]}{ds^{p+q}} \qquad \text{si}\quad 0<-q<p; \end{aligned}$$

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(\mathrm{S},\,\mathrm{S}')}\frac{d^{q-1}[\omega]}{ds^{q}}=\int_{h(\mathrm{S},\,\mathrm{S}')}\frac{d^{p+q-1}[\mathrm{P}(-s_t)\,\omega]}{ds^{p+q}} \qquad \text{si}\quad 0<q.$$

5. Ramification d'une intégrale, fonction d'un paramètre. — Les points t tels que S ait un point singulier constituent l'enveloppe des sous-variétés planes de T d'équation $s(x, y, t)=0$. Soit K l'ensemble de ceux des points de cette enveloppe tels que S soit en position générale par rapport à S′ et ait un seul point singulier, y, où

$$s_x(x, y, t)=0, \qquad s_t(x, y, t)\neq 0, \qquad \mathrm{Hessien}_x[s(x, y, t)]\neq 0 \qquad \text{pour}\quad x=y.$$

K est une sous-variété analytique de T, de codimension 1, d'équation

$$\mathrm{K}:\quad k(t)=0 \qquad [k_t\neq 0;\ k_t \text{ est parallèle à } s_t(y, y, t)].$$

Nous nous proposons d'étudier *près de* K l'intégrale

$$\text{(7)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{J}(t)=\int_{h(\mathrm{X},\,\mathrm{S}\cup\mathrm{S}')}\frac{[-s(x,y,t)]^{-q}}{(-q)!}\,\omega(x,y) \qquad \text{si}\quad q\leqq 0;\\ &\mathrm{J}(t)=\int_{h(\mathrm{S},\,\mathrm{S}')}\frac{d^{q-1}[\omega]}{ds^{q}} \qquad \text{si}\quad q>0. \end{aligned}\right.$$

Théorème. — $\mathrm{J}(t)$ *est* holomorphe *sur* K *si* $d^0(\omega)\neq l$.

Supposons $d^0(\omega)=l$. Les sous-groupes de $\mathrm{H}_c(\mathrm{X}, \mathrm{S}\cup\mathrm{S}')$ et $\mathrm{H}_c(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ qui s'annulent pour $t\in\mathrm{K}$ sont constitués par les multiples entiers des deux classes

$$e(\mathrm{X}, \mathrm{S}\cup\mathrm{S}') \quad \text{et} \quad e(\mathrm{S}, \mathrm{S}')=\partial e(\mathrm{X}, \mathrm{S}\cup\mathrm{S}')$$

images de deux classes d'homologie qu'E. Picard a nommées évanouissantes :

$$e(\mathrm{V}, \mathrm{S}) \quad \text{et} \quad e(\mathrm{V}\cap\mathrm{S})=\partial e(\mathrm{V}, \mathrm{S}),$$

où V désigne un voisinage ouvert du point singulier qu'a S pour $t\in\mathrm{K}$; ces classes ont les dimensions respectives l et $l-1$; quand t décrit un lacet autour de K, $h(\mathrm{X}, \mathrm{S}\cup\mathrm{S}')$ et $h(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ deviennent $h(\ldots)+ne(\ldots)$, l'entier n étant l'indice de Kronecker de

$$h(\mathrm{S}, \mathrm{S}') \quad \text{et} \quad e(\mathrm{V}\cap\mathrm{S}) \qquad \text{(S. Lefschetz)}$$

Définissons, quand $\mathrm{P}(k_t)\neq 0$; $p=d^0(\mathrm{P})$,

$$j_{\mathrm{P}}(t)=\int_{e(\mathrm{V},\,\mathrm{S})}\frac{[-s]^{p-q}}{(p-q)\,!}\,\frac{\omega}{\mathrm{P}(-s_t)} \qquad (q\leqq p);$$

$$j_{\mathrm{P}}(t)=\int_{e(\mathrm{V},\,\mathrm{S})}\frac{d^{q-p-1}}{ds^{q-p}}\,\frac{\omega}{\mathrm{P}(-s_t)} \qquad (p<q);$$

vu (5) et (6)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) j_{PQ}(t) = j_Q(t). \tag{8}$$

THÉORÈME. — *Si l est* impair

$$j_P(t)\, k(t)^{q-p-\frac{l}{2}} \quad \text{et} \quad J(t) - \frac{n}{2} j_1(t) \quad \textit{sont holomorphes sur } K.$$

Si l est pair, *$j_P(t)$ est* holomorphe *sur* K *et s'y annule $p - q + (l/2)$ fois;*

$$\textit{pour } q - \frac{l}{2} \leqq p, \quad J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t) \log k(t)] \quad \textit{est holomorphe sur } K.$$

La preuve utilise les propriétés et la définition très simple de e dues à I. Fáry [1].

6. LA DISTRIBUTION QUE DÉFINIT UNE INTÉGRALE, FONCTION D'UN PARAMÈTRE. — Appliquons le théorème précédent aux hypothèses que voici :

T et K sont des variétés analytiques *réelles; h* varie *continûment* en fonction de t, *même aux points de* K.

Si l est *impair*, il existe un entier $n(t)$, constant de chaque côté de K, tel que

$$J(t) - \frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_P(t)] \qquad \left(q - \frac{l+1}{2} \leqq p\right) \tag{9}$$

soit holomorphe sur K; *la distribution* $P(\partial/\partial t)[n(t) j_P(t)]$ est indépendante du choix de P et est parfaitement déterminée par la donnée de h [vu (8) et l'inégalité imposée à p].

Si l est *pair*, il existe un entier constant n et un entier $N(t)$, constant de chaque côté de K, tels que

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t) \log k(t)] - P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_P(t)] \qquad \left(q - \frac{l}{2} \leqq p\right) \tag{10}$$

soit holomorphe sur K; *la distribution*

$$\frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t) \log k(t)] + P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_P(t)]$$

est indépendante du choix de P et déterminée par la donnée de h, à l'addition près d'une fonction holomorphe sur K. D'où :

THÉORÈME. — *Il existe, près de* K, *une* distribution *unique* $J(t)$, *égale hors de* K *à la fonction* $J(t)$ *et telle que la distribution* (9) (*l impair*) *ou* (10) (*l pair*) *soit une fonction holomorphe sur* K. [*La distribution* $J(t)$ *est la fonction* $J(t)$ *si* $2q \leqq l + 1$]. *Convenons que l'intégrale* (7) *désigne cette distribution :* les formules de dérivation (5) *et* (6) *restent valables.*

Ces résultats permettent de poursuivre l'étude du problème de Cauchy [4].

(*) Séance du 22 décembre 1958.

(1) I. Fáry, *Ann. Math.*, 65, 1957, p. 35-37 et 47-53.

(2) J. Leray, *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 2253.

(3) J. Leray, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, 20, 1956, p. 589-590.

(4) J. Leray, *Bull. Soc. Math.*, 85, 1957, p. 389-429; 86, 1958, p. 75-96; *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 953.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Sur les équations différentielles périodiques.* Note de M. **Arnaud Denjoy.**

Continuation de l'étude de l'équation périodique $dX/dz = F(X, z)$, $X = (x, y)$. Le tore méridien $C^2(0)$ du tore S^3 de l'espace U^4 à quatre dimensions étant représenté par le carré G_0 dans le plan $z = 0$ de U^3, et un domaine G_1 du plan $z = 1$ vérifiant le principe (p), on construit un réseau de trajectoires changeant G_0 en G_1.

Dans ma dernière Note (1), j'ai défini des domaines $G_{1,i}$ satisfaisant dans le plan $z = 1$ au principe (p). Nous devons montrer que les points N_1 de $G_{1,i}$ sont les extrémités d'arcs $t^1(N_0)$ intégrant un système différentiel $dX/dz = F(X, z)$. Nous étudierons la possibilité d'imposer à la liaison (N_0, N_1) diverses conditions remarquables.

1. Nous nous aidons des considérations suivantes :

Dans deux plans $z = c$, $z = d (c < d)$ soient $\Gamma(z = c)$ et $\Delta(z = d)$ deux ensembles décrits respectivement par les points $I(i, i', c)$, $J(j, j', d)$ se correspondant chacun à chacun, avec conservation des congruences par $(r, m, 0)$, enfin reliés par des arcs $\tau(I, J)$, disjoints et congruents en même temps que leurs extrémités. Nous dirons que ces arcs, décrits par le point $N(x, y, z)$, forment un *réseau normal*, si :

1° sur τ, z croît de c à d;

2° il y a variation continue de l'arc $\tau(I, J)$ avec I dans Γ (et J dans Δ), et de sa tangente avec x, y, z dans la bande $c \leq z \leq d$;

3° τ est, en ses extrémités I, J, orthogonal aux plans $z = c$, $z = d$.

Si $c = 0$, $\Gamma \equiv G_0$ parcouru par N_0, et $d = 1$, $\Delta \equiv G_1$ décrit par N_1, les $\tau(N_0, N_1)$ forment un volume où $F_1 = dx/dz$, $F_2 = dy/dz$, donc $dX/dz = F(X, z)$, sont définis en chaque point. Ces fonctions sont périodiques par $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$ sur la frontière de ce volume, nulles pour $z = 0$, $z = 1$, donc prolongeables dans tout l'espace U^3 par les translations (r, m, q). Le réseau normal $\tau(N_0, N_1)$ définit donc une équation $dX/dz = F$ périodique.

Si $c < d < g$, et si dans le plan $z = g$ un ensemble $\Delta(g)$, décrit par un point H, est en correspondance ponctuelle biuniforme avec Δ (et avec Γ), la réunion des deux réseaux normaux $\tau(I, J)$, $\tau(J, H)$ est un réseau normal d'arcs $\tau(I, H)$.

La substitution de $(z - c')/(d' - c')$ à $(z - c)/(d - c)$ change le réseau normal joignant Γ à Δ en un réseau normal joignant les projections Γ', Δ' de Γ, Δ sur les plans $z = c'$, $z = d'$.

Il sera commode de ramener toute construction de réseaux normaux aux