L'oeuvre de Jules Schauder.

Cette oeuvre est en apparence diverse : elle apporte des contributions souvent fondamentales à quatre branches des mathématiques, qu'on a coutume d'étudier indépendamment l'une l'autre. En fait, c'est une oeuvre d'une grande continuité : Jules Schauder n'est pas un spécialiste; il remonte à l'origine des problèmes; il s'aperçoit qu'ils exigent de tout autres procédés que ceux qu'on a pris l'habitude de leur appliquer; sa pensée progresse, sans souci des cloisonnements qui compartimentent arbitrairement la science et qu'ont dû toujours bousculer les esprits vraiment originaux.

Sa puissance intellectuelle s'allie aux plus belles qualités de caractère : il est un grand travailleur, très scrupuleux. Il étudie "les problèmes qui se posent et non ceux qu'on se pose"; son oeuvre n'est pas un jeu brillant, mais un rude labeur, qui finit par créer la méthode dont l'élégante perfection orientera l'avenir.

* * *

<u>La théorie de l'intégration</u> fut le principal objet de ses premiers travaux. Sa thèse [1] étudie, dans l'espace euclidien, les mesures superficielles définies par Jansen et Gross; en particulier il étend la validité de la formule stokienne qui transforme une intégrale de surface en une intégrale de volume. Il prouve dans [8] la semi-continuité de ces deux mesures superficielles. Dans [7] il précise une autre formule stokienne : celle qui, dans le plan, transforme une intégrale simple en une intégrale

...

doubles; il lui donne le degré de généralité que devaient lui donner, fort ultérieurement, la théorie des fonctions généralisées de S. Sobolev, celle des distributions de L. Schwartz, enfin celle des courants de G. de Rham; il l'applique au calcul des variations. Dans [6] il fait une analyse très fine des applications du plan en lui-même, de leurs déterminants fonctionnels, des applications inverses, du changement de variables dans les intégrales doubles; il utilise l'indice topologique. Ses premiers travaux de topologie algébrique sont d'ailleurs en cours de publication.

*
* *

<u>La topologie algébrique des espaces de Banach</u> doit englober les propriétés des espaces euclidiens découvertes par L.E.I. Brouwer et J.W. Alexander. On croyait impossible une telle extension de ces propriétés, quand Jules Schauder réussit à l'effectuer.

Notons X un espace de Banach et x un point de X ; on nomme complètement continue (vollstetig) toute application continue de X en lui-même qui applique chaque partie bornée de X dans un compact; $F(x)$ désignera une telle application.

Jules Schauder prouve le théorème du point fixe : si $F(x)$ applique en elle-même une partie bornée et convexe de X, alors celle-ci contient un point fixe de $F(x)$, c'est-à-dire un point x tel que $x = F(x)$.

Il prouve le théorème d'invariance du domaine : toute application biunivoque du type $x - F(x)$ est bicontinue et applique tout domaine sur un domaine.

Il définit le degré topologique, en un point y, d'une application $\Phi(x) = x - F(x)$, définie sur un domaine D et sa frontière D' : ce degré

...

est une fonction additive de D, à valeurs entières; il est défini quand y est hors de $\phi(D')$; tant que cette condition reste réalisée, une modification continue des données le laisse constant; il est nul si y est hors de $\phi(D)$; il vaut $+1$ ou -1 quand ϕ est biunivoque et que y appartient à $\phi(D)$. Le degré au point $y = 0$ de l'application $x - F(x)$, définie sur D, est appelé l'indice total des points fixes de $F(x)$ contenus dans D. Ainsi se trouve défini l'indice de tout ensemble isolé et borné des points fixes de $F(x)$ c'est une fonction additive d'ensemble, à valeurs entières; une modification continue des données ne l'altère pas, tant qu'il est défini. Par exemple l'indice d'un zéro d'une fonction analytique $\phi(x)$ d'une variable numérique complexe x est l'ordre de multiplicité de ce zéro; il est strictement positif. Ces propriétés de l'indice des points fixes ont permis d'établir l'existence et parfois l'unicité de problèmes d'analyse très divers.

L'on sait comment F. Riesz a étendu l'alternative de I. Fredholm à des équations linéaires du type

$$x - F(x) = y \qquad\qquad (y \text{ donné}).$$

Cette extension est une conséquence immédiate du théorème de l'invariance du domaine. Signalons que l'extension des autres théorèmes de I. Fredholm est faite par Jules Schauder dans [12] : il étudie, dans le dual de X, l'application transposée de F. Il établit son théorème du point fixe dans [10]; dans [3], [4] et [10] il en donne des variantes, applicables seulement à certains types d'espaces de Banach; rappelons que G.D. Birkhoff et O.D. Kellog avaient établi ce théorème dans quelques espaces fonctionnels. Jules Schauder établit le théorème de l'invariance du domaine dans [9] et [15]; il se limite à certains types d'espaces de Banach; mais l'étude du degré topologique d'une application

...

composée donnera une preuve générale et simple de ce théorème. Il définit et étudie le degré topologique d'une application et l'indice des points fixes dans [21], que la note [20] résume et que la conférence [32] commente. Son théorème du point fixe fut étendu par A. Tychonoff aux espaces à voisinages convexes; Jules Schauder avait antérieurement prévu la possibilité, actuellement réalisée, d'étendre à de tels espaces tous les théorèmes précédents, ceux de J.W. Alexander, affirmant l'isomorphie des groupes de Betti des complémentair de fermés homéomorphes, et la formule des points fixes de S. Lefschetz. Mais déjà un nouveau sujet l'absorbait : la théorie des équations aux dérivées partielles.

Ce ne sont pas des voies abstraites qui conduisirent Jules Schauder aux découvertes que nous venons de résumer. Du sujet qu'elles élucident, les théoriciens des espaces abstraits ne trouvaient à dire que ceci : le fait que l'espace de Hilbert est homéomorphe à toutes ses variétés planes de dimension infinie prouve que ni l'invariance du domaine, ni la topologie algébrique ne s'étendent aux espaces de dimension infinie. Jules Schauder découvrit néanmoins la possibilité d'une telle extension, en cherchant une théorie des équations non linéaires applicable au problème non linéaire de Dirichlet; I. Fredholm avait de même édifié sa théorie des équations fonctionnelles linéaires pour trouver les fonctions harmoniques vérifiant des conditions aux limites.

* * *

<u>Les équations aux dérivées partielles du second ordre, de type elliptique</u>, sont étudiées maintes fois par Jules Schauder. Ses Mémoires contenant les théorèmes de topologie que nous venons de citer les appliquent aussitôt à des équations intégrales, à des problèmes de Cauchy ou, le plus

...

souvent, à des problèmes de Dirichlet non linéaires : les théorèmes d'existence sont allégés des hypothèses assurant l'unicité. L'un des plus remarquables résultats est celui qu'obtient [21] en utilisant les procédés qu'annonce la note [16] et qu'expose [19] : le problème de Dirichlet, à données portées par un contour convexe, est toujours possible pour l'équation quasi-linéaire de type elliptique

$$a\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\, b(\ldots) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(\ldots) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (ac > b^2).$$

S. Bernstein avait prouvé ce théorème en supposant a, b, c indépendants de z : l'unicité de la solution du problème est alors assurée. La méthode qu'imagine Jules Schauder évite le lourd emploi des séries normales de S. Bernstein, qui devait supposer les données analytiques; elle utilise par contre les théorèmes les plus précis de la théorie du problème de Dirichlet linéaire. La note [23] est une autre application remarquable de cette méthode, qui devait permettre de réviser et compléter les belles études qu'avait faites S. Bernstein du problème de Dirichlet non linéaire, du second ordre, à deux variables indépendantes. Jules Schauder se contenta d'amorcer cette révision.

Son attention venait de se fixer sur le problème de Dirichlet linéaire. Pour construire ses solutions, qui sont régulières, on construisait une solution élémentaire, qui est singulière, et, par son intermédiaire, des potentiels, dont une équation de Fredholm déterminait les densités. Ce procédé, quand on l'applique à l'équation de Laplace, est simple, fournit explicitement la solution et permet d'étudier commodément ses propriétés; mais ce n'est plus le cas quand on l'applique à une équation linéaire à coefficients variables; il ne résout plus explicitement le problème de Dirichlet; il n'est plus qu'une longue démonstration d'un théorème d'existence. Jules Schauder entreprend de prouver ce théorème sans détour. Il montre que l'existence de la solution du problème de Dirichlet est assurée quand la norme de cette solution, en supposant qu'elle

...

existe, a été majorée en fonction des données; il effectue cette "majoration a priori" en utilisant habilement les propriétés de l'équation de Laplace; il l'effectue très explicitement.

Ce procédé est ébauché par la note [17], que perfectionne la note [18]. Pour le développer, Jules Schauder commence par préciser les propriétés des potentiels newtoniens de simple et double couche; mais C.D. Kellog le devance et seule paraît la première partie de ce travail : [13] et [14]. Jules Schauder publie alors dans [25] un premier exposé de son procédé; un an après, il en donne dans [26] une seconde version, extrêmement élégante et brève. Les 9 pages de [26] et les 6 pages constituant le chapitre IV de [25] forment une théorie complète du problème de Dirichlet linéaire; la note [22] en donne une variante importante. Cette théorie est d'une simplicité et d'une finesse admirables.

La conférence [31] expose avec une grande clarté l'essentiel de cette méthode, et propose de l'appliquer aux équations elliptiques d'ordre quelconque. En effet, quinze ans plus tard, le problème de Dirichlet d'ordre quelconque devait être élégamment résolu au moyen d'une majoration a priori de la norme de sa résolvante par M.I. Visik (1951), L. Garding (1951) et F.E. Browder (1952-1956) voir Communications on pure and appl. math. t8, p. 351-356.

<u>Les équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique</u> venaient d'être le sujet d'un célèbre traité de J. Hadamard : Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (1932). J. Hadamard réussissait à résoudre ce problème pour un nombre quelconque de variables; sa solution était analogue à la solution classique du problème de Dirichlet : construction d'une solution élémentaire et, par son intermédiaire,

...

de potentiels; mais la définition de ceux-ci était devenue délicate : il fallait prendre des parties finies d'intégrales. Ce procédé était relativement simple dans le cas des équations linéaires à coefficients constants; il se compliquait dans le cas des coefficients variables; il fournissait une expression de la solution du problème de Cauchy; mais il ne suffisait ni à l'étude des propriétés de cette solution, ni à la résolution du problème de Cauchy non linéaire, ni à celle du problème mixte (type Cauchy-Dirichlet).

Jules Schauder crée, pour le problème de Cauchy et le problème mixte, linéaires ou non, une autre méthode, analogue à celle qu'il avait imaginée pour le problème de Dirichlet : elle se base encore sur une majoration a priori de la solution et sur la possibilité de résoudre un cas particulier du problème. A l'aide d'inégalités du type de celles de S. Sobolef, il déduit la majoration a priori de la relation de conservation de l'énergie, plus précisément de la généralisation de cette relation que K. Friedrichs et H. Lewy avaient déjà employée pour résoudre des problèmes de Cauchy à l'aide d'équations aux différences. Le cas particulier qu'il choisit n'est plus, comme pour le problème de Dirichlet, celui de l'équation à coefficients constants; c'est le problème à données analytiques : il utilise le théorème de Cauchy-Kowalewski. Plus précisément, il le complète comme suit : si le problème est linéaire, sa solution est holomorphe dans un domaine ne dépendant que du domaine d'holomorphie des données et des coefficients de l'équation; ce complément de Jules Schauder permettra, bien ultérieurement, d'étudier les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles, linéaires et analytiques.

Il résout par cette méthode le problème de Cauchy, dans [24] et [28]; puis, en collaboration avec M. Krzyzanski, le problème mixte dans [27] et [28]. Il donne dans [33] une élégante variante, qui exige des hypothèses minimes et s'applique à l'équation du premier ordre et aux systèmes d'équations du premier

...

ordre à deux variables indépendantes. Il s'agit toujours du cas hyperbolique, linéaire ou non. Il résume dans [29] ces quatre Mémoires.

I. Petrowsky est alors en train d'étendre cette méthode aux équations d'ordre quelconque (Recueil math., 1937). Jules Schauder fait d'autres découvertes; peut-être celles qu'annoncent [30] et les dernières lignes de [28]. La guerre vient les anéantir et sa Femme et lui-même.

. .
.

Fonder la topologie algébrique des espaces de Banach, réduire les problèmes classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles à la preuve que certaines applications linéaires d'espaces fonctionnels ont une norme finie, c'est être à la fois un grand précurseur et un disciple de Stefan Banach.

Jules Schauder fut même son collaborateur : il a établi dans [11] le théorème que S. Banach présumait après en avoir prouvé le plus important corollaire et qui est aujourd'hui célèbre sous le nom de théorème de Banach. Cette terminologie aurait certes l'approbation de Jules Schauder, tant étaient grandes son admiration et sa reconnaissance à l'égard de Stefan Banach.

Jules Schauder subit d'autres influences : c'est parce que S. Bernstein et J. Hadamard, le passionnaient qu'il créa des méthodes surclassant les leurs. Et surtout, par L.E.I. Brouwer, G.D. Birkhoff et O.D. Kellog, il fut le disciple de H. Poincaré, qui déclare dans sa Notice sur ses travaux : "Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis situs"; Jules Schauder y fut conduit par une voie toute nouvelle ..

Jean LERAY.