Liste d'exercices n° 1

Exercices fondamentaux

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

1. Montrer que l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Dans chacun des cas suivants dites, en justifiant votre réponse, si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i, les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles.

Si votre réponse est *non*, précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations.

1. $E_1 = \mathbb{R}^3$; $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 2x + 3y - 4z = 0\}$.
2. $E_2 = \mathbb{C}^3$; $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 2x + 3y - 4z = 1\}$.
3. $E_3 = F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; $F_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ ;\ f(3) = 0\}$.
4. $E_4 = \mathbb{R}[X]$; $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ;\ d^oP \leq 5\}$.

3.

1. Le vecteur $g = (2, 14, -34, 7)$ appartient-il au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $e_1 = (1, 4, -5, 2)$ et $e_2 = (1, 2, 3, 1)$?
2. Dans $\mathbb{C}^3$, déterminer λ de façon que le vecteur $(\lambda, 1 + i, 1)$ appartienne au sous-espace engendré par $(3i, 2, 0)$ et $(1, i, i)$.

4. On donne dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $u_1 = (2, 3, -1), u_2 = (1 - 1, -2), v_1 = (3, 7, 0), v_2 = (5, 0, -7)$.

1. Montrer que les deux sous-espaces engendrés par u_1 et u_2 d'une part et par v_1 et v_2 d'autre part sont identiques.
2. Déterminer $F_1 \cap F_2$, où $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $u_1 = (4, 2, -5), u_2 = (-1, 3, 1)$, $v_1 = (3, -4, 2)$ et $v_2 = (5, -2, 2)$.

(Indication : on pourra écrire les équations paramétriques puis cartésiennes des sous-espaces vectoriels considérés)

5. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x = y = z\}$ et $E_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ y, z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Familles libres, liées, génératrices et bases

6. Précisez la dépendance linéaire des familles de vecteurs suivantes en donnant, dans chaque cas, une relation de dépendance s'il en existe une ainsi qu'une sous-famille libre de cardinal maximal.

1. Dans $\mathbb{R}^2, (u, v, w)$ avec $u = (3, 2), v = (4, -1)$ et $w = (5, -2)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3, (u, v, w)$ avec $u = (2, 5, 7), v = (1, 5, -2)$ et $w = (1, 1, -4)$.
3. Dans $\mathbb{C}_2[X], (P, Q, R)$ avec $P = 3 + 3X + X^2, Q = 1 - X - X^2$ et $R = -1 - X + X^2$.

7.

1. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F_1 &= ((1, 1, 1), (1, 2, 3)) \\ F_2 &= ((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)) \end{aligned}$$

2. Même question dans $\mathbb{C}^3$:

$$F_1 = ((1, 2, i), (-2, -3i, -5), (9, 6, 7))\,.$$

3. Même question dans $\mathbb{C}_2[X]$:

$$F_1 = (1 + X, 1 + X^2, X + X^2)\,.$$

8. Dans cet exercice il s'agit, pour chacun des cas ci-dessous, de prouver que B est une base de l'espace vectoriel E, puis de calculer les coordonnées du vecteur u dans la base B.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $B = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$; $u = (a,b,c)$.
2. $E = \mathbb{C}^3$; $B = ((1,-1,i),(-1,i,1),(i,1,-1))$; $u = (1+i, 1-i, i)$.

9. Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, étudiez la liberté des familles suivantes :

1. (f,g,h) avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \cos(2x)$.
2. (f,g,h) avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x, g(x) = \exp(x)$ et $h(x) = \exp(2x)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

10. Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par $(2,1,4,5),(1,2,3,4)$ et par $(2,2,1,0),(1,4,2,-1),(2,1,-1,0),(2,-5,4,2)$.

Déterminer les dimensions de $E, F, E+F, E\cap F$ en donnant une base de chacun d'eux.

11. Soient $u = (1,2,3)$ et $v = (6,7,8)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $E = \mathrm{Vect}(u,v)$. Montrer que $B = (u,v)$ est une base de E.

Exprimer les coordonnées du vecteur $w = (4,5,6)$ de E dans la base B.

12. Soient P et Q les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\begin{aligned} P &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}, \\ Q &= \mathrm{Vect}(v_1 = (2,-1,0), v_2 = (-2,2,-1), v_3 = (4,-1,-1)). \end{aligned}$$

1. Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces P et Q.
2. Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x,y,z pour que v appartienne à Q.
3. Déterminer une base puis la dimension de $P\cap Q$ puis de $P+Q$.

Exercices complémentaires

13. Dans chacun des cas suivants dites, en justifiant votre réponse, si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i, les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles.

Si votre réponse est *non*, précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations.

1. $E_1 = \mathbb{R}^3$; $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
2. $E_2 = \mathbb{R}[X]$; $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ d^oP = 5\}$.
3. $E_3 = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $F_3 = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f + f' = 0\}$.

14. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Prouver que $E \setminus F$ n'est jamais un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner un exemple prouvant que $F \cup G$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer : ($F\cup G$ sous-espace vectoriel de E) $\iff$ ($F \subset G$ ou $G \subset F$).
4. Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel, au sens de l'inclusion, qui contient $F\cup G$.

15.

1. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de $\mathbb{R}^3$:
   $F_1 = ((1,1,1),(1,2,3),(1,1,a))$ où a est un paramètre réel.
   $F_2 = ((1,1,1),(1,a,a^2),(1,b,b^2))$ où a et b sont deux paramètres réels.
2. Même question dans $\mathbb{R}_2[X]$:
   $F_2 = (1+X, 1+2X+X^2, X^2)$

16. Soient U, V, W les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z)/2x+y+4z=0\} \ ; \ V = \{(x,y,z)/3x=5z\}, \\ W &= \{(x,y,z)/x=y=0\}. \end{aligned}$$

Déterminer une base de chacun de ces trois sous-espaces. Déterminer les trois sommes $U+V, U+W, V+W$, en précisant à chaque fois si la somme est directe.

Exercices d'entraînement

17. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, quels sont les sous-espaces vectoriels ?

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x+y=0\}$.
2. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x+y=1\}$.
3. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x+y\geq 0\}$.

18. Soient $u=(1,1,1), v=(0,-1,2), w=(1,-2,3)$ trois éléments du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille (u,v,w) est liée.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u,v,w). Donner une base de F.
3. Soit $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x+2y+z=0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G. Montrer que $F=G$.
   (Indication : Montrer correctement que $F\subset G$ et $G\subset F$)

19. Avec le moins de calculs possible, précisez si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées. Si la famille est liée, donner une relation de liaison.

1. Dans $\mathbb{R}^3, (u,v,w)$ avec $u=(1,7,2), v=(2,-14,-4)$ et $w=(7,5,-3)$.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X], (u,v,w,t)$ avec $u=1, v=X, w=X^2$ et $t=a+bX+cX^2$.
3. Dans $\mathbb{R}_3[X], (u,v,w,t)$ avec $u=1, v=1+X, w=1+X+X^2$ et $t=1+X+X^2+X^3$.
4. Dans $\mathbb{C}^3, (u,v,w)$ avec $u=(1,0,1), v=(1,j,j^2)$ et $w=(j,j^2,1)$.
5. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R}), (u,v,w)$ avec $u=\sin(x), v=\cos(x),\ w=\cos(x+\frac{\pi}{3})$.

20. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle de la forme $x'+a(t)x=0$ où a est une fonction continue est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.
Même question avec $x''(t)+a.x'(t)+b.x(t)=0$ où a et b sont des réels.

21.

1. Montrer que $F=\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$ dont on donnera la dimension ainsi qu'une base.
2. Montrer que l'ensemble G des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par $X(X-1)^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Donner la dimension et une base de G.
3. Montrer que $\mathbb{R}_5[X]=F\oplus G$.
4. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$. Utiliser la division euclidienne pour reprouver directement qu'il existe un unique couple $(P_1,P_2)\in F\times G$ tel que $P=P_1+P_2$.
5. Application numérique : $P(X)=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5$.

Liste d'exercices n° 2

Application linéaire. Noyau et image

Exercices fondamentaux

1. Dans cet exercice, il s'agit de préciser, avec preuve à l'appui dans chaque cas, si l'application f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est linéaire ou non.
a). $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$
b). $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$
c). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$; $f(x, y) = ax + by + c$; a, b et c réels.

2. Dans cet exercice, il s'agit de déterminer à chaque fois, le noyau et l'image de l'application linéaire f de E dans F, en donnant une base de chacun de ces sous-espaces.
Dans chaque cas, précisez si f est injective, surjective, bijective.
Quand f est bijective, donner sa bijection linéaire réciproque.
a). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x, y)) = (x - y, x, x + y)$
b). $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x, y, z)) = (y + z, z + x, x + y)$
c). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x, y)) = (2x + 3y, 3x + 10y)$
d). $E = \mathbb{R}^4$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x, y, z, t)) = (3x - 4y + 2z - 5t, 3x - z + 2t)$

3. a). Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,((1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1))$
b). Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

4. a). Montrer que si f est une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, son noyau est de dimension 3.
b). Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (0, -1, 1, 1)$, $u_2 = (0, -3, -1, 5)$ et $u_3 = (4, -1, -3, 3)$.
α). Vérifier que H est de dimension 3.
β). Montrer qu'une application linéaire non nulle f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admet H pour noyau si et seulement si elle vérifie $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = 0$.
γ). Déterminer toutes les applications linéaires f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admettant H pour noyau.

5. On rappelle que $R_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
a). Soit f l'application de $R_3[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall P \in R_3[X]$, $f(P) = P(2)$. Montrer que f est linéaire ; déterminer son image et son noyau.
b). Soit a et b deux réels distincts et f l'application de $R_4[X]$ dans $R_4[X]$ définie par $f(P) = XP(a) + P(b)$ pour $P \in R_4[X]$. Montrer que f est un endomorphisme de $R_4[X]$; déterminer son noyau et en donner une base ; déterminer son image et en donner une base.

6. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est à dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$.
On rappelle que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
• $F_1 \oplus F_2 = E$
• $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$
• Pour tout vecteur u de E, il existe un unique couple (u_1, u_2) de vecteurs vérifiant :
$u_1 \in F_1$, $u_2 \in F_2$, $u_1 + u_2 = u$

On notera :
$u_1 = p_1(u) =$ "Projection de u sur F_1 parallèlement à F_2"
$u_2 = p_2(u) =$ "Projection de u sur F_2 parallèlement à F_1"
a). Montrer que p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E .
b). Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1) = F_2$ et $\mathrm{Im}(p_1) = F_1$
(par raison de symétrie, on a bien sûr aussi $\mathrm{Ker}(p_2) = F_1$ et $\mathrm{Im}(p_2) = F_2$).
c). Montrer que : $v \in F_1 \Longleftrightarrow p_1(v) = v$
d). Montrer que : $p_1 \circ p_2 = p_1$

7. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est à dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$. La symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est l'application $s : E \to E$ définie de la manière suivante : si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$.
a). Montrer que s est un isomorphisme linéaire.
b). F_1 est le sous-espace des vecteurs de E invariants par s, et $F_2 = \mathrm{Ker}(s + id)$.
c). $s \circ s = id$ (s est une involution) . d). Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = id$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(s - id) \oplus \mathrm{Ker}(s + id) ,$$

puis que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + id)$.

8. Soit E un K-espace vectoriel. On se pose la question de savoir si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
a). Montrez que si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire H stable par f (*i.e.* $f(H) \subset H$) alors $H = \mathrm{Im}(f)$.
b). Prouvez un résultat analogue pour $\mathrm{Im}(f)$.
c). Prouvez que : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
d). Prouvez que : $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
e). Si f est un endomorphisme de E, a-t-on $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$?

Exercices complémentaires

9. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que la famille $(f(u), f^2(u), f^3(u), \ldots, f^n(u))$ soit une base de E.
a). Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est aussi une base de E.
b). Montrer que f est bijectif.
c). Montrer qu'il existe n scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :
$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(u)$.
d). En déduire que : $f^n = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$.

10. Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée.
Montrer que f est une homothétie vectorielle (*i.e.* $\exists \lambda \in K$, $f = \lambda Id_E$).

11. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
a). Soit E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E (*i.e.* $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$). Prouvez que : $f \circ p = p \circ f \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f .
b). On appelle centre de l'anneau $\mathcal{L}(E), +, o)$ l'ensemble des $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que :
$\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $foh = hof$. Montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est réduit aux homothéties (*i.e.* λId_E, $\lambda \in K$).

12. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par $f(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
a). Montrer que f est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$.
b). Soit $Q \in \mathrm{Im} f$; montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

13. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes et on considère $n+1$ nombres complexes distincts $a_0, \ldots, a_n$.
a). Montrer que l'application f de E_n dans K^{n+1} définie par $f(P) = (P(a_0), \ldots, p(a_n))$ est linéaire.
b). Démontrer qu'étant donnés $n+1$ nombres complexes $b_0, \ldots, b_n$, il existe un unique polynôme P de E_n tel que $P(a_i = b_i$ pour $0\frac{3}{4}i\frac{3}{4}n$.
c). Montrer par une méthode analogue que si a_0, a_1, a_2 sont trois nombres complexes distincts et si b_0, β_0, b_1, b_2 sont quatre nombres complexes, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à trois tel que

$$P(a_0) = b_0, P'(a_0) = \beta_0, P(a_1) = b_1, P(a_2) = b_2 \ .$$

Exercices d'entraînement

14. *S*oit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même défini par

$$f(a + bX + cX^2) = (3a + b - c) + (2a + 2b - c)X + (4a + 2b - c)X^2 \ .$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.
3. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ f(P) = P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera une base.
4. Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par $1+X+X^2$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est somme directe de F et G.

15. *U*n endomorphisme p de E est appelé projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
a). Montrer que : p projecteur de $E \Longleftrightarrow (Id_E - p)$ projecteur de E .
b). Si p est un projecteur, montrer que :
- $\mathrm{Im}(Id_E - p) = \mathrm{Ker}(p)$
- $\mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Im}(p)$
- $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
- p est la projection vectorielle de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

c). Soit p un projecteur et u un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
- $p \circ u = u \circ p$
- $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u

d). Soit p et q deux projecteurs de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(p+q)$ soit aussi un projecteur.

16. Montrer que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -id$, alors $\mathrm{Ker}(f - id)$ et $\mathrm{Ker}(f + id)$ sont supplémentaires.

17. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) la dimension de E est paire,
(ii) il existe un endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Im} u$.

Liste d'exercices n° 3

Exercices fondamentaux

1. *D*éterminer tous les produits possibles de deux matrices(y compris les carrés) parmi les matrices suivantes, puis les inverses de ces matrices lorsqu'elles sont inversibles(on pourra utiliser les calculs effectués) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^tA_1, {}^tA_2, {}^tA_1.{}^tA_2$. Que constate-t-on ?
Calculer $A_2 + {}^tA_1, 2A_2 + 3{}^tA_1$.

2. *S*oient les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ définies par :

$$f((x, y, z)) = (x + 2y + 3z, y + 2z) \ , \ g((x, y)) = (x - y, x - 2y, x - 3y)$$

1. Donner, dans les bases canoniques $b = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $c = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice M de f et la matrice N de g.
2.(a) Calculer la matrice A de $g \circ f$ dans la base c et la matrice D de $f \circ g$ dans la base b.
(b) En déduire l'expression de $(g \circ f)((x, y, z))$ et de $(f \circ g)((x, y))$. Faire la vérification.
3. Montrer que l'application $f \circ g$ est bijective. En déduire que la matrice D est inversible et calculer D^{-1}.

3. *S*oit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice, dans la base canonique
$b = (e_1, e_2, e_3) : A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
On pose : $c_1 = e_2 + e_3, c_2 = e_1 + e_3, c_3 = e_1 + e_2$.
1. Montrer que $c = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice B de f dans cette base.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer B^n et en déduire A^n.
3. On considère les trois suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n, y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n, z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

4. *S*oit $b = (b_1, b_2)$ (resp. $c = (c_1, c_2, c_3)$) une base d'un espace vectoriel E (resp. F) et $M_{b,c}(f)$ la matrice suivante d'une application f de E dans F relativement aux bases b et c : $M_{b,c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
1. Montrer que $\widetilde{b} = (3b_1 + b_2, -2b_1 + 5b_2)$ est une base de E.
2. Montrer que $\widetilde{c} = (-c_1 + c_3, 2c_1 - c_2 + 2c_3, c_1 - c_2 + c_3)$ est une base de F.
3. Calculer la matrice $M_{\widetilde{b},\widetilde{c}}(f)$ de f relativement aux bases $\widetilde{b}$ et $\widetilde{c}$.

5. *O*n considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Déterminer le rang de A.

Exercices complémentaires

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x,y,z)) = (y-z, z-x, x-y)$.
1. Trouver la matrice A de f dans la base canonique $b = (e_1, e_2, e_3)$.
2. On considère la famille $c = (c_1, c_2, c_3)$ avec $c_1 = e_1, c_2 = e_1 + e_2, c_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
Montrer que c est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice P de passage de la base b à la base c. Calculer, à l'aide de P et A, la matrice B de f dans la base c. Faire la vérification.

7. Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 3.
On définit l'application $f : E \to E$ par $f(P) = (x^2-1)P'' + 2xP'$.
1. Vérifier que f est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $b = (1, x, x^2, x^3)$.
2. Calculer le rang de f et trouver une base de Ker$f$, puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3.(a) Vérifier que pour tout $j = 0, \ldots, 3$, il existe un unique polynôme unitaire P_j de degré j et un unique réel λ_j tel que $f(P_j) = \lambda_j P_j$.
(b) Justifier que $c = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E et donner la matrice D de f dans cette base.
(c) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, D^n et en déduire A^n.

8. *1.* Calculer le rang de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique N, prouver que E est somme directe du noyau et de l'image de u.

9. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1.(a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. En déduire que la restriction v de u à son image :
$v : \mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Im}(u)$, est une application bijective.
2. Soit p la projection linéaire sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$. Trouver la matrice Q de p dans la base canonique. En déduire que $u = \alpha p$, où α est un réel que l'on déterminera.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer u^n à l'aide de la question 2.
Faire la vérification en calculant par récurrence A^n.
4. Soit c_0 une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et c_1 une base de $\mathrm{Im}(u)$. Justifier que $c = c_0 \cup c_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice M de u dans cette base.

10. Calculer en fonction du paramètre m le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

Exercices d'entraînement

11. *Extrait de l'examen de Juin 1999*

On considère l'application $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, est $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ($m$ désigne un paramètre réel).
1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f_m)$ et $\mathrm{Im}(f_m)$ en fonction du paramètre m. On donnera pour chacun de ces sous-espaces vectoriels une base. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_m) + \mathrm{Im}(f_m)$?
2. Soit $u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,0)$. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, et calculer P^{-1}.
3. On prend $m = -1$ et on pose $f = f_{-1}$.

(a) Soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = v\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Donner une base de F.
(b) Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PB^nP^{-1}$.
(c) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 2$ et en déduire A^n.

12. *Extrait de l'examen de Mai 1997*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application de matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $b_1 = (1, 1, -2), b_2 = (1, 1, -3), b_3 = (0, -1, 2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer de deux manières différentes la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

13. *Extrait de l'examen de Mai 1998*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application de matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = 4v\}$. Montrer que
(a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
(b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Exprimer la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$.
(c) Calculer B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
(d) Exprimer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$, puis calculer P^{-1}.
En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = 1, z_0 = -1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,
$x_{n+1} = -2x_n, y_{n+1} = 3x_n + y_n + 3z_n, z_{n+1} = 3x_n + 3y_n + z_n$
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Liste d'exercices n° 4

Déterminants et systèmes linéaires

Exercices fondamentaux

1. *Matrices nilpotentes.*

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \geq 1$.
2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $B = I + A$, calculer B^n pour tout $n \geq 1$. (On rappellera la formule du binôme pour les matrices, en précisant dans quels cas elle est applicable).
3. Calculer B^{-1} en utilisant une formule du cours.

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes, indiquer lesquelles sont inversibles et calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 14 & 15 \\ 9 & 12 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 11 & 10 \\ 16 & 13 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier (sans les développer) que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix} \text{ (pour } x = -a-b-c).$$

4.

1. Calculer le déterminant des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, et dire celles qui sont libres,
$$\{(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (0,-1,-1)\}, \qquad \{(3,2,1),\ (2,-1,1),\ (1,3,0)\}.$$
2. Soient les vecteurs $u = (1,0,-1,0)$, $v = (3,-1,1,1)$, $w = (-1,1,-3,-1)$ de $\mathbb{R}^4$. Donner la dimension du sous-espace vectoriel engendré par (u,v,w) et déterminer l'équation (ou les équations) de ce sous-espace.

5.

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant les déterminants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & = & -4 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & = & 2 \end{array}\right. .$$

6. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants, en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exercices complémentaires

7. *Matrices de permutation.*

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient les applications linéaires f et g définies respectivement par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_3$ et $g(e_1) = e_1, g(e_2) = e_3, g(e_3) = e_2$. On note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique.

1. Calculer les matrices AB, BA, A^2, B^2, A^{-1}, B^{-1}.
2. Vérifier les résultats obtenus dans la question 1 en écrivant les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ associées aux endomorphismes f et g et en utilisant le cours.

8. *S*oient A et B deux matrices réelles de taille $n \times n$, telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ (on pensera aux identités remarquables en utilisant les nombres complexes et aux propriétés du déterminant).

9. *Matrices par blocs.*

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(M)$, $\det(A)$, $\det(B)$, et vérifier que $\det(M) = \det(A).\det(B)$.

10. *C*alculer les déterminants suivants :

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}, \quad j = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$
2. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}, \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

11. Déterminer a et b pour que le vecteur $u = (a, 2, 3, b) \in \mathbb{R}^4$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 4, 1, 2)$.

Exercices d'entraînement

12. *Matrice de projection.*

On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'application f définie comme la projection sur le plan $E : x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $F = Vect\{(1, 1, 1)\}$.

1. Donner une base de E et indiquer sa dimension. Faire de même pour F.
2. Écrire la matrice P de l'endomorphisme f dans la base obtenue. Déterminer le rang de P, ainsi que l'image et le noyau de f.
3. Montrer que $P^2 = P$.

13. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$

14. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $Det\,A$, $Com\,A$ et en déduire A^{-1}.

15. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants, en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array} \right. .$$

16. *Extrait de l'examen de Juin 1999*

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), u_2 = (0, 1, 0, -2), u_3 = (2, -1, 0, 3), v_1 = (1, -1, 1, 0), v_2 = (-2, 0, a, 2)$$

où a est un paramètre réel.

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $U = Vect\{u_1, u_2, u_3\}$ et $V = Vect\{v_1, v_2\}$.

1. Calculer la dimension de V. Cette dimension dépend-elle du paramètre a ?
2. (a) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en fonction des réels x, y, z, t le déterminant des 4 vecteurs u_1, u_2, u_3, u.
   (b) En déduire une relation entre x, y, z et t comme condition nécessaire et suffisante pour que $u = (x, y, z, t)$ appartienne à U.
3. (a) Calculer la dimension et une base de $U \cap V$ (distinguer selon les valeurs de a).
   (b) Calculer la dimension de $U + V$.