Université de Nantes
Département de Mathématiques
Algèbre

DEUG MIAS Module M2
Année 2002/2003

Liste d'exercices $n°$ 2

Application linéaire. Noyau et image

Exercices fondamentaux

Exercice 1 Dans cet exercice, il s'agit de préciser, avec preuve à l'appui dans chaque cas, si l'application f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est linéaire ou non.
a). $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$
b). $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$
c). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$; $f(x,y) = ax + by + c$; a, b et c réels.

Exercice 2 Dans cet exercice, il s'agit de déterminer à chaque fois, le noyau et l'image de l'application linéaire f de E dans F, en donnant une base de chacun de ces sous-espaces.
Dans chaque cas, précisez si f est injective, surjective, bijective.
Quand f est bijective, donner sa bijection linéaire réciproque.
a). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x,y)) = (x-y, x, x+y)$
b). $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x,y,z)) = (y+z, z+x, x+y)$
c). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x,y)) = (2x+3y, 3x+10y)$
d). $E = \mathbb{R}^4$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x,y,z,t)) = (3x-4y+2z-5t, 3x-z+2t)$

Exercice 3
a). Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,((1,2,3,4),(0,1,1,1))$
b). Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((-1,1,0),(1,0,1))$.

Exercice 4
a). Montrer que si f est une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, son noyau est de dimension 3.
b). Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (0,-1,1,1)$, $u_2 = (0,-3,-1,5)$ et $u_3 = (4,-1,-3,3)$.
α). Vérifier que H est de dimension 3.
β). Montrer qu'une application linéaire non nulle f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admet H pour noyau si et seulement si elle vérifie $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = 0$.
γ). Déterminer toutes les applications linéaires f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admettant H pour noyau.

Exercice 5
On rappelle que $R_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
a). Soit f l'application de $R_3[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall P \in R_3[X]$, $f(P) = P(2)$. Montrer que f est linéaire; déterminer son image et son noyau.
b). Soit a et b deux réels distincts et f l'application de $R_4[X]$ dans $R_4[X]$ définie par $f(P) = XP(a) + P(b)$ pour $P \in R_4[X]$. Montrer que f est un endomorphisme de $R_4[X]$; déterminer son noyau et en donner une base; déterminer son image et en donner une base.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est à dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$.
On rappelle que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

• $F_1 \oplus F_2 = E$
• $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$
• Pour tout vecteur u de E, il existe un unique couple (u_1, u_2) de vecteurs vérifiant :
$u_1 \in F_1$, $u_2 \in F_2$, $u_1 + u_2 = u$
On notera :
$u_1 = p_1(u) =$ "Projection de u sur F_1 parallèlement à F_2"
$u_2 = p_2(u) =$ "Projection de u sur F_2 parallèlement à F_1"
a). Montrer que p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E .
b). Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1) = F_2$ et $\mathrm{Im}(p_1) = F_1$
(par raison de symétrie, on a bien sûr aussi $\mathrm{Ker}(p_2) = F_1$ et $\mathrm{Im}(p_2) = F_2$).
c). Montrer que : $v \in F_1 \Longleftrightarrow p_1(v) = v$
d). Montrer que : $p_1 \circ p_2 = p_1$

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est à dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$. La symtrie par rapport F_1 parallllement F_2 est l'application $s : E \to E$ dfinie de la manire suivante: si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$.
a). Montrer que s est un isomorphisme linaire.
b). F_1 est le sous-espace des vecteurs de E invariants par s, et $F_2 = \mathrm{Ker}(s + id)$.
c). $s \circ s = id$ (s est une involution) . d). Soit s un endomorphisme de E vrifiant $s \circ s = id$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(s - id) \oplus \mathrm{Ker}(s + id) .,$$

puis que s est la symtrie par rapport $\mathrm{Ker}(s - id)$ parallllement $\mathrm{Ker}(s + id)$.

Exercice 8 Soit E un K-espace vectoriel. On se pose la question de savoir si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
a). Montrez que si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire H stable par f (*i.e.* $f(H) \subset H$) alors $H = \mathrm{Im}(f)$.
b). Prouvez un résultat analogue pour $\mathrm{Im}(f)$.
c). Prouvez que : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
d). Prouvez que : $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
e). Si f est un endomorphisme de E, a-t-on $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$?

Exercices complmentaires

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que la famille $(f(u), f^2(u), f^3(u), \ldots, f^n(u))$ soit une base de E.
a). Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est aussi une base de E.
b). Montrer que f est bijectif.
c). Montrer qu'il existe n scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :
$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(u)$.
d). En déduire que : $f^n = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Exercice 2 Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée.
Montrer que f est une homothétie vectorielle (*i.e.* $\exists \lambda \in K$, $f = \lambda Id_E$).

Exercice 3 On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
a). Soit E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E (*i.e.* $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$). Prouvez

que : $f \circ p = p \circ f \iff \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f .
b). On appelle centre de l'anneau $\mathcal{L}(E), +, o)$ l'ensemble des $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que :
$\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $foh = hof$. Montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est réduit aux homothéties ($i.e.$ λId_E, $\lambda \in K$).

Exercice 4 Soit n un entier suprieur ou gal 2 et soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-mme dfinie par $f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
a). Montrer que f est linaire et dterminer Ker$f$, Imf.
b). Soit $Q \in$ Imf; montrer qu'il existe un unique polynme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 5 On note E_n l'espace vectoriel des polynmes de degr infrieur ou gal n coefficients complexes et on considre $n+1$ nombres complexes distincts $a_0, \ldots, a_n$.
a). Montrer que l'application f de E_n dans K^{n+1} dfinie par $f(P) = (P(a_0), \ldots, p(a_n))$ est linaire.
b). Dmontrer qu'tant donns $n+1$ nombres complexes $b_0, \ldots, b_n$, il existe un unique polynme P de E_n tel que $P(a_i = b_i$ pour $0in$.
c). Montrer par une mthode analogue que si a_0, a_1, a_2 sont trois nombres complexes distincts et si b_0, β_0, b_1, b_2 sont quatre nombres complexes, il existe un unique polynme de degr infrieur ou gal trois tel que

$$P(a_0) = b_0, P'(a_0) = \beta_0, P(a_1) = b_1, P(a_2) = b_2 \ .$$

Exercices d'entranement

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-mme dfini par

$$f(a + bX + cX^2) = (3a + b - c) + (2a + 2b - c)X + (4a + 2b - c)X^2 \ .$$

1. Montrer que f est linaire.
2. Dterminer une base et la dimension de Ker$f$ et Imf.
3. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ f(P) = P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on dterminera une base.
4. Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$ engendr par $1 + X + X^2$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est somme directe de F et G.

Exercice 2 Un endomorphisme p de E est appelé projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
a). Montrer que : p projecteur de $E \iff (Id_E - p)$ projecteur de E .
b). Si p est un projecteur, montrer que :
• $\mathrm{Im}(Id_E - p) = \mathrm{Ker}(p)$
• $\mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Im}(p)$
• $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
• p est la projection vectorielle de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
c). Soit p un projecteur et u un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
• $p \circ u = u \circ p$
• $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u
d). Soit p et q deux projecteurs de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(p+q)$ soit aussi un projecteur.

Exercice 3 Montrer que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -id$, alors $\mathrm{Ker}(f - id)$ et $\mathrm{Ker}(f + id)$ sont supplmentaires.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrer que les deux propositions suivantes sont quivalentes:
(i) la dimension de E est paire,
(ii) il existe un endomorphisme u de E tel que Ker$u$ = Imu .