Université de Nantes
Département de mathématiques
Algèbre

DEUG MIAS - Module M2
Année 2002/2003

Liste d'exercices n°4
Déterminants et systèmes linéaires

Exercices fondamentaux

Exercice 1. Matrices nilpotentes.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \geq 1$.
2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $B = I + A$, calculer B^n pour tout $n \geq 1$. (On rappellera la formule du binôme pour les matrices, en précisant dans quels cas elle est applicable).
3. Calculer B^{-1} en utilisant une formule du cours.

Exercice 2.

Calculer le déterminant des matrices suivantes, indiquer lesquelles sont inversibles et calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 14 & 15 \\ 9 & 12 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 11 & 10 \\ 16 & 13 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Exercice 3.

Justifier (sans les développer) que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix} \text{ (pour } x = -a-b-c).$$

Exercice 4.

1. Calculer le déterminant des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, et dire celles qui sont libres,
$$\{(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (0,-1,-1)\}, \qquad \{(3,2,1),\ (2,-1,1),\ (1,3,0)\}.$$
2. Soient les vecteurs $u = (1,0,-1,0)$, $v = (3,-1,1,1)$, $w = (-1,1,-3,-1)$ de $\mathbb{R}^4$. Donner la dimension du sous-espace vectoriel engendré par (u,v,w) et déterminer l'équation (ou les équations) de ce sous-espace.

Exercice 5.

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant les déterminants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & = & -4 \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & = & 2 \end{array}\right..$$

Exercice 6.

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants, en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1 \end{array}\right..$$

Exercices complémentaires

Exercice 1. Matrices de permutation.

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient les applications linéaires f et g définies respectivement par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_3$ et $g(e_1) = e_1, g(e_2) = e_3, g(e_3) = e_2$. On note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique.

1. Calculer les matrices AB, BA, A^2, B^2, A^{-1}, B^{-1}.
2. Vérifier les résultats obtenus dans la question 1 en écrivant les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ associées aux endomorphismes f et g et en utilisant le cours.

Exercice 2.

Soient A et B deux matrices réelles de taille $n \times n$, telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ (on pensera aux identités remarquables en utilisant les nombres complexes et aux propriétés du déterminant).

Exercice 3. Matrices par blocs.

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(M)$, $\det(A)$, $\det(B)$, et vérifier que $\det(M) = \det(A).\det(B)$.

Exercice 4.

Calculer les déterminants suivants :

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}, \quad j = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$
2. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}, \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.

Déterminer a et b pour que le vecteur $u = (a, 2, 3, b) \in \mathbb{R}^4$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 4, 1, 2)$.

Exercices d'entraînement

Exercice 1. Matrice de projection.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'application f définie comme la projection sur le plan $E : x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $F = Vect\{(1, 1, 1)\}$.

1. Donner une base de E et indiquer sa dimension. Faire de même pour F.
2. Écrire la matrice P de l'endomorphisme f dans la base obtenue. Déterminer le rang de P, ainsi que l'image et le noyau de f.
3. Montrer que $P^2 = P$.

Exercice 2.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $Det\, A$, $Com\, A$ et en déduire A^{-1}.

Exercice 4.

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants, en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exercice 5. Extrait de l'examen de Juin 1999

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), u_2 = (0, 1, 0, -2), u_3 = (2, -1, 0, 3), v_1 = (1, -1, 1, 0), v_2 = (-2, 0, a, 2)$$

où a est un paramètre réel.

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $U = Vect\{u_1, u_2, u_3\}$ et $V = Vect\{v_1, v_2\}$.

1. Calculer la dimension de V. Cette dimension dépend-elle du paramètre a ?
2. (a) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en fonction des réels x, y, z, t le déterminant des 4 vecteurs u_1, u_2, u_3, u.
   (b) En déduire une relation entre x, y, z et t comme condition nécessaire et suffisante pour que $u = (x, y, z, t)$ appartienne à U.
3. (a) Calculer la dimension et une base de $U \cap V$ (distinguer selon les valeurs de a).
   (b) Calculer la dimension de $U + V$.