
Liste d'exercices n° 2

Exercices fondamentaux

Convergence de suites

Exercice 1 Étudier la convergence des suites suivantes, et donner leurs limites ventuelles:

$$a)\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};\ \ b)\ u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n};\ \ c)\ u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}(\alpha > 0);\ \ d)\ u_n = \frac{E[nx]}{n};\ e)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ .$$

Exercice 2 On dit qu'une suite complexe (z_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|z_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout nN. Montrer que la suite (z_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$convergent dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'une suite complexe convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 3 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple :

1. " Si (u_n) est une suite telle que (u_n^2) converge. Alors la suite (u_n) converge"
2. " On suppose de plus que (u_n) est à termes positifs. Alors la suite (u_n) converge. "
3. " Soit (a_n) une suite bornée et (ε_n) une suite convergeant vers 0. Alors la suite de terme général $u_n = \varepsilon_n a_n$ converge vers 0."
4. " Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} - u_n \to 0$? "
5. " Si $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors (u_n) converge. "
6. " Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \to 0$ " (on rappelle que $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 telle qu'on puisse crire $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$).
7. " Si $u_n - v_n \to 0$ alors $u_n \sim v_n$. "
8. " Si (u_n) et (v_n) convergent et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors (w_n) converge. "
9. " Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs et tend vers zéro, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang."

Exercice 4 On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 12,\ \text{et}\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}\ .$$

1) On pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites géométriques convergentes, et donner leur limite.
2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et préciser leur limite.
3) Montrer directement que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire à l'aide de la première question ?

Exercice 5 (rgles de d'Alembert et de Cauchy pour les suites)

1) Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
2) Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $|u_n|^{\frac{1}{n}} \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
3) Application: trouver les limites des suites de termes gnraux $\frac{a^n}{n^p}, \frac{a^n}{n!}$.
Exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
1) Montrer que la suite (u_n) est bornée (on pourra procéder par récurrence).
2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone; en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
3) Montrer que

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2},$$

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \ .$$

Que peut-on en déduire ?
Exercice 8 Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, k étant un réel vérifiant $0 \leq k < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Limites de fonctions

Exercice 9 Étudier les limites en x_0 des fonctions suivantes :

$$a)x_0 = 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}; \quad b)x_0 = +\infty,\ f(x) = x\ln\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right) (\alpha, \beta \text{ réels donnés}) ;$$

$$c)x_0 = 4,\ f(x) = \frac{x-4}{x^2 - x - 12}; \quad d)x_0 = 0,\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$e)x_0 = +\infty,\ f(x) = x(\sqrt{1+x^2} - x); \quad f)x_0 = 1,\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3};$$

$$g)x_0 = -\infty,\ f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}; \quad h)x_0 = 1,\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}.$$

Exercice 10 Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f\ :]a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x)$ a une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ quand $x \to a^+$.

1. En utilisant le critère de Cauchy pour les fonctions, montrer que la fonction f a une limite quand $x \to a^+$.
2. En déduire que f admet un prolongement dérivable sur $[a,b]$.

Exercice 11 On rappelle la propriété suivante: soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{R}$: la fonction f a pour limite l quand $x \to a$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de limite a, la suite $(f(x_n))$ a pour limite l.

1. Dterminer les limites de $(1 + \frac{1}{n})^n$ et de $\sqrt[n]{n}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

3. Soit χ_Q la fonction indicatrice de Q (i.e. χ_Q vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels). Montrer que χ_Q n'admet de limite en aucun point.

Exercice 12 Soit ($\alpha \in \mathbb{R}$); on considre la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha \sin x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

1. Trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n^\alpha$ et $f(y_n) = -y_n^\alpha$. En déduire que, pour $\alpha \geq 0$, f ne peut pas avoir de limite en $+\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ lorsque $\alpha < 0$.

Exercice 13 Etudier les limites à droite et à gauche en zéro des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x}{|x|}; x \mapsto \frac{\sin x}{x + 2|x|}; x \mapsto \frac{\sin x}{\tan x}; x \mapsto \frac{\sin x}{x}; x \mapsto \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

Exercice 14 On rappelle que, si x est un nombre réel, $E[x]$ désigne sa partie entière. Montrer que $\dfrac{x}{E[x]} \to_{x\to+\infty} 1$.

Exercices complémentaires

Exercice 1

1. On considère une suite (a_n) qui converge vers 0 . Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout np on ait
$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k | \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k|.$$
En déduire que la suite (a_n) converge en moyenne vers 0, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to 0$.
2. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Démontrer que $S_n := \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \to l$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si (u_n) est monotone, la convergence de (S_n) entraîne celle de (u_n).
4. Application : Soit (x_n) une suite telle que $x_{n+1} - x_n \to l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $x_n \sim \lambda n$.
5. Application : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda \in \mathbb{R}$. Alors ${u_n}^{\frac{1}{n}} \to \lambda$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \to_{x\to+\infty} l \in \mathbb{R}$. On veut montrer que : $\dfrac{f(x)}{x} \to_{x\to+\infty} l$.
Pour cela, on suit la méthode suivante : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1. Trouver $a > 0$ tel que $\forall x > a$: $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que :
$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a)}{x} - \frac{a}{x}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que pour $x > a$, on ait $|\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}| \leq \dfrac{K}{x}$.

3. Conclure.

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on écrit $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n dans $\mathbb{N}^*$, puis $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante minorée.

2. Prouver que
$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{b_n 5^n} \ .$$
En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par
$$u_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } u_{n+1} = \sin u_n \ .$$

1. Démontrer que (u_n) est décroissante et convergente. Quelle est sa limite ?
2. Soit $p \in \mathbf{Z}^*$; donner un développement limité de $\sin^p x/x^p$ à l'ordre 4.
3. En choisissant $p = -2$ en déduire que
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2) \ ; (x \to 0) \ .$$
4. A l'aide de l'exercice 1 en déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 5 Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que la suite (u_n) converge vers l si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l .Trouver une suite non bornée telle que (u_{2n}) converge.
2) On suppose que les trois suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 6 On suppose $0 < u_0 < v_0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$u_n \, v_n = u_0 \, v_0, \quad \text{et } v_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}).$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante; en déduire que ces deux suites convergent.
3. Démontrer que
$$v_n - u_n < v_{n-1} - u_{n-1}.$$

En déduire que $\lim v_n - u_n = 0$ puis que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune que l'on déterminera. Cas particulier: $u_0 = 1, v_0 = p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 On considre deux suites (a_n) et (b_n) de limites respectives a et b, et on dfinit la suite (c_n) par
$$c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) \ .$$
Dmontrer qu'il existe un rel M tel que
$$|c_n - ab| \frac{M}{n}(\sum_{k=1}^{n}(|a - a_k| + |b - b_k|) \ .$$

En dduire que $c_n \to ab$.

Exercices d'entranement

Exercice 1 On considre la fonction g dfinie par $g(x) = e^x(x^2+1)$.
1 Montrer qu'on peut crire sa drive n-ime sous la forme

$$g^{(n)}(x) = e^x(x^2 + u_n x + v_n)\ .$$

2 Dmontrer que $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = v_n + 2n$. En dduire u_n et v_n en fonction de n, puis l'expression de $g^{(n)}(x)$.

Exercice 2 Etudier la suite (u_n) définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \ln(1+u_n)\ .$$

Exercice 3 Etudier la suite (u_n) vrifiant $u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par

$$u_0 = a, v_0 = b, 0 < a < b \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}\ .$$

1 Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.
2 Calculer u_n et v_n explicitement en posant $a = b\cos\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{}{2}$.
3 En dduire que

$$\lim u_n = b\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ .$$

4 En choisissant $a = 1, b = 2$, dterminer une valeur approche de .

Exercice 5 Soient a, b deux rels tels que $0 < ab$ et (x_n) la suite dfinie par rcurrence par ax_0x_1b et $x_{n+2} = \sqrt{x_n x_{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: ax_nb.

2. Dmontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_{n+1} - x_n| k |x_n - x_{n-1}|, \text{ avec } k = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}\ .$$

3. En dduire que (x_n) converge.