Faculté des sciences et des techniques — **Année 2002/2003**
Département de Mathématiques — **DEUG A, M2, Analyse**

Liste d'exercices 3
Exercices fondamentaux

Continuité

Exercice 1 1. Les expressions a)b)c)d) de l'exercice 9 de la liste 2 définissent-elles des fonctions continues sur leur domaine de définition ?
Peuvent-elles se prolonger par continuité au point x_0 (lorsque x_0 est fini) ?
2. Même question avec la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$ et $x_0 = 0$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Représenter graphiquement f puis étudier sa continuité.

Exercice 3 Soit k un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \mid f(x) - f(y) \mid \leq k \mid x - y \mid$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$. En utilisant l'exercice 8 de la liste 2, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l.
Montrer que $f(l) = l$ et que l est l'unique point fixe de f.
3. Montrer que ces résultats s'appliquent si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si f' vérifie :
$\exists k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mid f'(x) \mid \leq k$.
4. Appliquer cette méthode à la fonction f définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et avec $u_0 = 0$. Comparer avec l'exercice 6 de la liste 2.

Exercice 4 Montrer, en utilisant le théorème des accroissements, que,
pour $x > 0$, $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.

Intégration

Exercice 5 Soit $a < b$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, et telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
Indication : on pourra utiliser la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a, b]$.

Exercice 6 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soient $a < b$ et f et g deux applications continues : $[a, b] \to \mathbb{R}$.
1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geq 0$.
2. En déduire que $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$ et que $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g = 0$.
3. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a, b]$. Montrer que $(b - a)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$.
Pour quelles fonctions y a-t-il égalité ?

Exercice 7 Soit I_n l'intégrale $\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^3+x^3}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
Indication : On utilisera un encadrement de I_n.

Exercice 8 Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que la fonction g garde un signe constant sur $[a, b]$.
A l'aide de la fonction $F(x) = f(x)\int_a^b g(t)dt$, montrer qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que :
$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$. (Cette égalité est appelée première formule de la moyenne).
Indication : distinguer les cas où $g(t) \geq 0$ et $g(t) < 0$ pour tout t de $[a, b]$ pour obtenir un encadrement de $\int_a^b f(t)g(t)dt$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction F.
Étudier le cas où g est la fonction constante égale à 1.

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes : $\int_a^x \mathrm{Argch}t dt$, $\int_a^x \ln(t + \frac{1}{t})dt$ pour $a, x \in]0, +\infty[$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ pour tout réel a.

Exercice 11 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période T.

Montrer que l'intégrale $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ne dépend pas du réel a.

Exercices complémentaires

Exercice 12 Les expressions suivantes définissent-elles des fonctions continues sur leur domaine de définition ? Peuvent-elles se prolonger par continuité ?
$f_1 : x \mapsto \frac{x}{|x|}$, $f_2 : x \mapsto \frac{\sin x}{2+2|x|}$, $f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

Exercice 13 Étudier la continuité sur $]-\pi, +\pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x \sin x}{1-\cos x}$. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 14 Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Si $f(x) = g(x)$ pour tout rationnel x de $\mathbb{Q}$, montrer que $f = g$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}$.
Indication : on utilisera que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
2. Si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels(on dit que f est additive) et si g désigne l'homothétie de rapport $f(1)$(i.e. $g(x) = f(1)x$ pour tout réel x), montrer que $f = g$.
3. Si f est additive et également multiplicative ($f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout couple (x, y) de réels), montrer que f est soit la fonction nulle, soit la fonction identité.

Exercice 15 Soit f une fonction continue, montrer que, si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ pour tout réel a positif.

Exercice 16 **Intégrales de Wallis**
Pour $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.
1) Pour $n \geq 2$, montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (Indication : on pourra écrire $(\sin x)^n = (\sin x)^{n-1} \sin x$ et utiliser une intégration par parties).
2) En déduire I_{2p} et I_{2p+1}, pour $p \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que, pour $n \geq 1, I_{n-1} \geq I_n > 0$ et que $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$.
4) En déduire la convergence et la limite de la suite : $u_p = \left(\frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6....(2p)}\right)^2 (2p+1)$.
5) Montrer que $\forall p \geq 0, I_{2p+1}^2 \leq \frac{\pi}{2(2p+1)}$.
6) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercices d'entraînement

Exercice 17 Soit f une fonction réelle, définie et continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs dans ce même segment $[0, 1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(x) - f(x')| \geq |x - x'|$ pour tout couple (x, x') d'éléments de $[0, 1]$.
1. Soit x un élément de $[0, 1]$; démontrer que la suite de nombres réels définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ est une suite convergente de limite notée l.(Indication :
on montrera que $f(t) \geq t$ pour tout $t \in [0, 1]$ pour montrer que la suite (x_n) est croissante.)
2. Démontrer que $f(l) = l$. (On peut compléter cette étude en montrant par l'absurde que $f(x) = x$ pour tout élément x de $[0, 1]$).

Exercice 18 Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[a, b]$ et telle que la fonction dérivée f' soit continue sur $[a, b]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$ et $J_n = \int_a^b f(x) \cos(nx) dx$.
Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.
Indication : on utilisera une intégration par parties pour I_n et J_n.

Exercice 19 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $2p \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1 - x)^p dx$.
1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,\frac{1}{2}}$.
2. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,\frac{1}{2}}$ et $I_{n+1,\frac{1}{2}}$ et en déduire $I_{n,\frac{1}{2}}$.
3. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ et en déduire $I_{n,p}$.
4. En déduire une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \frac{1}{n+k+1}$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.