Université de Nantes
Département de mathématiques
Analyse

DEUG MIAS - Module M2
Année 2002/2003

Liste d'exercices n°4
Intégrales généralisées et séries numériques

Exercices fondamentaux

Exercice 1.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$
9. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$

On pourra utiliser une intégration par partie pour le (8).

Exercice 2. Règle de Riemann

Soit f une fonction continue positive définie sur $[a, +\infty[$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) \leq \dfrac{M}{x^\alpha}$ pour $x \geq A$. En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $l \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $l = +\infty$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) \geq \dfrac{M}{x^\alpha}$ pour $x \geq A$. En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.
3. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Exercice 3. Séries géométriques

Calculer la somme partielle $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ de la série géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. En déduire que cette série est convergente si et seulement si $|r| < 1$ et donner sa somme dans ce cas.

Exercice 4. Séries de Riemann

1. On note $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad |H_{2k} - H_k| \geq \frac{1}{2}.$$
   Rappeler le critère de Cauchy de convergence des suites dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la série harmonique est divergente.
2. Pour $\alpha \leq 1$, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
3. Pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt.$$
   En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 5. Règle de Riemann

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \leq \dfrac{M}{n^\alpha}$ pour $n \geq N$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in]-\infty,1]$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $l \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $l = +\infty$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geq \dfrac{M}{n^\alpha}$ pour $n \geq N$. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
3. Étudier la nature des séries de terme général suivant :

   (a) $u_n = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^n}$ (b) $u_n = \dfrac{n}{a^n}$, pour $a > 0$ (c) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercices complémentaires

Exercice 1.

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.
2. Appliquez le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 2. Intégrales de Bertrand

Discuter selon les valeurs de α et β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\,dx$. (On utilisera le changement de variable $t = \ln x$).

Exercice 3. Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit f une fonction positive continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Application: discuter selon les valeurs de α et β la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $n \geq 2$.

Exercice 4. Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+.$$
   (a) Si $l < 1$, construire des constantes $c > 0$, $\lambda < 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq c\lambda^n$ pour tout $n \geq k$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
   (b) Si $l > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.
   (c) Que penser de ce critère de convergence si $l = 1$ (considérer les séries $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$).
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 5. Séries alternées

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente.
2. Déterminer la nature de la série de terme général :

(a) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $(-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)$

(c) $(-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(d) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(e) $\dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

Exercice 6.
Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que, si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exercices d'entraînement

Exercice 1.
Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^5}\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \sin(\frac{1}{x})\, dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

Exercice 2.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{chx}}\, dx$ converge et la calculer.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$ convergent et les calculer.

Exercice 3.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (a) Trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Même question avec la suite (u_n) donnée par $u_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2}), n \geq 2$.

Exercice 4.
Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
2. $\dfrac{1}{n^{\ln n}}$
3. $\dfrac{1}{(\ln n)^2}$
4. $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$
5. $\dfrac{3^n}{n!}$
6. $\left(\dfrac{n+3}{2n+4}\right)^n$
7. $\dfrac{n^5}{2^{n^2}}$
8. $\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$
9. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.