Université de Nantes DEUG MIAS-M2
Département de Mathématiques Année 2002/2003

Devoir libre 2

(à rendre la semaine du 7 au 12 avril)

Exercice 1.

1. (a) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.
   En considérant la fonction $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que:
   $$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$
   (b) Soient f et g deux fonctions continues sur un voisinage V d'un point a de $\mathbb{R}$ et dérivables sur $V/\{a\}$. On suppose de plus que $f(a) = g(a) = 0$ et que g et g' ne s'annulent pas sur $V/\{a\}$.
   Montrer que si $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = l$ alors $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t)}{g(t)} = l$. (Règle de l'Hôpital)
2. Application: calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et soit:
$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que la fonction F est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
2. Déterminer F pour f définie par $f(t) = |t|$ et tracer son graphe.
3. Montrer que si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = l$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Soit $b_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ b_2 = e_1 - e_3,\ b_3 = e_2 + e_3$. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g^3 = 0$ et $g^2 \neq 0$. Soit $c_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(c_3) \neq 0$. On pose $c_2 = g(c_3)$ et $c_1 = g(c_2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice C de g dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1. Soit l'application $d : E \to E$, définie par $d(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P.
   (a) Montrer que d est linéaire.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} d$ et $\operatorname{Im} d$ et donner leur dimension.
   (c) L'application d est-elle injective? surjective? Justifier vos réponses.
2. On considère l'application $f : E \to E$, définie par:
   $$f(P) = 2P + P' - 2X^2P''.$$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$ de E.
   (c) Montrer que f est inversible et calculer f^{-1}.
   (d) Soit le polynôme $S = 1 + X + X^2$. Déterminer le polynôme P de E tel que $f(P) = S$.