NOM: **DEUG MIAS 2002/2003 – Mathématiques 2**

Prénom: **Lundi 17 février 2003**

Numéro de groupe de TD:

Interrogation écrite

Tous documents et calculatrices interdits

Algèbre

Soient $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ et $\mathbf{v}_5$ cinq vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On propose les quatre affirmations ci-dessous numérotées de **(1)** à **(4)**. Pour les affirmations que vous pensez vraies, justifiez-les par une *démonstration*. Pour les affirmations que vous pensez fausses, justifiez votre opinion en donnant un *contre-exemple* explicite, c'est-à-dire une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ne vérifie pas l'affirmation en question.

(1) Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une famille libre, alors la famille $(\mathbf{v}_1)$ est nécessairement libre.

(2) Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une famille libre, alors la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est nécessairement libre.

(3) Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ est une famille génératrice, alors la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est nécessairement génératrice.

(4) Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ est une famille génératrice, alors la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$ est nécessairement génératrice.

Exercice d'analyse au verso

<u>Analyse</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont on note $|f| : x \mapsto |f(x)|$ la valeur absolue. On rappelle que la fonction f est dite *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de x) tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, qu'elle est dite *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de x) tel que $m \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et qu'elle est dite *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

(1) Montrer que si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on a $-(|a| + |b|) \leq a \leq |a| + |b|$.

(2) Montrer que si f est bornée, alors $|f|$ est majorée.

(3) Montrer que si $|f|$ est majorée, alors f est bornée.

(4) On se donne une autre fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et on pose $h(x) = \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2}$.
Montrer les deux sens de l'équivalence: f et g sont bornées $\Leftrightarrow$ h est majorée.

<u>Exercice d'algèbre au recto</u>