

# S3M23 – Géométrie euclidienne

## 24h de CM – 32h de TD

L'objectif de cette unité de la deuxième année de Licence de mathématiques est l'étude de figures géométriques (droites, coniques) et des transformations qui les conservent globalement (les isométries) dans un espace euclidien. La notion générale récurrente est celle de forme quadratique ou forme bilinéaire symétrique : le premier chapitre leur est consacré, précédant les chapitres plus géométriques. L'accent sera mis sur les applications géométriques en basse dimension : le plan, l'espace à trois dimensions.

*Prérequis* : algèbre linéaire de base, fonctions trigonométriques, nombres complexes et exponentielle complexe.

### 1 Formes quadratiques

- Forme bilinéaire, forme quadratique, forme polaire
- Matrice d'une forme quadratique, changement de base
- Orthogonalité de deux vecteurs, orthogonal d'une partie, base orthogonale
- Réduction de Gauss, somme de carrés de formes linéaires indépendantes
- Rang
- Théorème de Sylvester, signature, indice
- Dualité

*Objectifs* : réduction d'une forme quadratique, calcul de rang et de signature.

### 2 Espaces euclidiens

- Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz
- Orthogonalité de sous-espaces, orthogonal et bi-orthogonal
- Base orthonormée, orthogonalisation de Gram-Schmidt
- Adjoint d'un opérateur
- Isométries vectorielles et linéarité, symétries
- Isométries du plan : rotations et symétries

*Objectifs* : orthogonalités dans le plan et l'espace, isométries du plan.

### 3 Espaces affines euclidiens

- Espace affine, sous-espace affine, barycentre, distance
- Application affine, repère affine, coordonnées
- Isométries du plan affine euclidien : classification
- Angles du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$
- Isométries du plan et nombres complexes
- Isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  : les différents types
- Produit vectoriel

*Objectifs* : calculs dans les espaces affines (barycentre, coordonnées, distances), calculs des éléments caractéristiques des isométries en dimension 2, reconnaissance des isométries dans l'espace.

## 4 Coniques

- Coniques comme lieux donnés par un polynôme du second degré à deux variables
- Intersection d'une conique avec une droite, tangente à une conique
- Classification affine des coniques
- Présentation des coniques par foyer et directrice
- Classification des coniques dans le plan euclidien
- Équation d'une conique en coordonnées polaires centrées en un foyer
- Présentation bifocale des coniques

**Objectifs** : reconnaissance des coniques sous diverses présentations

## 5 Quadriques

- Quadriques affines de l'espace : les différents types
- Quadriques réglées
- Quadriques de révolution
- Sections planes d'un cône

**Objectifs** : choix adapté de coordonnées pour équation d'une quadrique, détermination de sections par les plans de coordonnées

## 6 Compléments

- Coniques et équations diophantiennes
- Coniques et le mouvement des planètes (Kepler, Newton)

**Objectifs** : Ce chapitre, au contenu optionnel, introduira à des thèmes présents dans d'autres modules. Il sera abordé éventuellement lors du dernier cours.

*Des feuilles d'exercices et les sujets de devoir et contrôles sont disponibles sur*

`www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/M23/`

ainsi que sur le serveur *Enseignement à distance* de la Faculté des Sciences et techniques

`www.sciences.univ-nantes.fr/ead`