Nom :
Prénom :
Groupe :

Contrôle continu du 24 octobre 2006
Durée 1h20

Le sujet est constitué de trois parties sur une feuille recto-verso.
Les réponses à la première seront données sur la feuille du sujet, à rendre avec la copie.

I

Cet exercice est noté sur 10 points. Une réponse juste donne un point, une réponse fausse donne un point négatif, l'absence de réponse ne donne ni point négatif ni point positif. Un total négatif est ramené à zéro.

Vrai ☐ Faux ☐ La forme polaire de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to xz + y^2 \in \mathbb{R}$ est $x_1 z_2 + y_1 y_2$.

Vrai ☐ Faux ☐ La forme quadratique $(u, v, w, x) \in \mathbb{R}^4 \to u^2 + 2w^2 \in \mathbb{R}$ est de signature $(2, 0)$.

Vrai ☐ Faux ☐ La forme quadratique $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 \in \mathbb{R}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $((1, 1), (0, 1))$.

Vrai ☐ Faux ☐ L'adjoint de l'endomorphisme $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (y, 2x) \in \mathbb{R}^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3. L'application $P \in \mathbb{R}_3[X] \to \int_{-3}^{3} P(3t)P'(t^3)dt \in \mathbb{R}$ définit une forme quadratique.

Vrai ☐ Faux ☐ La forme quadratique $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + 2(x + y)^2 + 3(x + y + z)^2 \in \mathbb{R}$ est de rang 6.

Vrai ☐ Faux ☐ Cauchy, Pythagore et Schwarz étaient contemporains.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 2. L'application $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2 \to P'(2)Q(-2) \in \mathbb{R}$ définit une forme bilinéaire.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit E un espace vectoriel de dimension d. L'espace dual de l'espace dual de E est de dimension $2d$.

Vrai ☐ Faux ☐ L'application $z \in \mathbb{C} \to \Im\mathrm{m}(2z^2) \in \mathbb{R}$ est une forme quadratique.

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

II

Soit $\mathcal{Q}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\mathcal{Q}(U, V, T, X) = UX - V(T + X), \quad (U, V, T, X) \in \mathbb{R}^4.$$

(**1**) Exprimer $\mathcal{Q}$ comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

(**2**) Déterminer le rang et la signature de $\mathcal{Q}$.

III

(**1**) Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(a, b, c) = a^2 + b^2 - 2c^2, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

et D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $d = (1, 1, 1)$.

(**1**) Déterminer une partie génératrice de l'orthogonal $K = D^\perp$ de D relativement à la forme quadratique q. Quelle est sa dimension ?

(**2**) A-t-on $K \oplus D = \mathbb{R}^3$?